Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

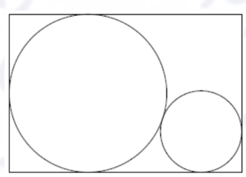
Nivel Bachillerato

Lista de Problemas

31 de Agosto de 2022

Problema 1 (4 puntos)**.** *Lili e Isabel corren por una pista circular, ambas comenzando en un punto P. Lili corre a una velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj. Isabel también corre en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad constante, pero lo hace un 25 % más rápido que Lili. Lili comienza a correr primero e Isabel comienza a correr cuando Lili ha completado un tercio de una vuelta. Cuando Isabel rebasa a Lili por quinta vez, ¿cuántas veces ha pasado Lili por el punto P?*

Problema 2 (4 puntos)**.** *Dos circunferencias tangentes exteriormente se encuentran en el interior de un rectángulo. La circunferencia pequeña, que tiene radio 3, es tangente a dos lados del rectángulo, mientras que la más grande es tangente a tres lados del rectángulo como se muestra en la figura:*



Si el área del rectángulo es 98, ¿cuál es el valor del radio de la circunferencia más grande?

Problema 3 (3 puntos)**.** *Considere la función f definida en el conjunto de los enteros de la siguiente forma:*

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \textit{si } n \textit{ es par} \\ n^2-1 & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$$

Encuentre todos los enteros n que satisfacen la ecuación $f(f(n)) = 8$.

Problema 4 (4 puntos). *Considere tres circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, todas con centro en un mismo punto O, cuyas respectivas áreas son 4π, 3π y 2π. Desde un punto A sobre $\mathcal{C}_1$ se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_2$, siendo B el punto de tangencia, y se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_3$, siendo C el punto de tangencia. Si B y C están en el mismo lado de OA, determine el valor del ángulo $\measuredangle BAC$.*

Problema 5 (4 puntos). *Demuestre la siguiente identidad:*

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos(4x)\cdots\cos(2^{2022}x)=\frac{\operatorname{sen}(2^{2023}x)}{2^{2023}\operatorname{sen}(x)}$$

Problema 6 (4 puntos). *Una sucesión* tipo Fibonacci *es una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en la que a_1 y a_2 son números positivos y*

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \qquad \textit{para } n \geq 3.$$

Si $a_1, a_2, \ldots, 107, \ldots$ es la sucesión tipo Fibonacci que contiene a 107 y tiene el mayor número posible de términos precediendo a 107, ¿cuáles son los valores de a_1 y a_2?

Problema 7 (5 puntos). *Demuestra que se satisface la desigualdad*

$$5\operatorname{sen}(x+37^\circ)+\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)\leqslant\sqrt{41}$$

para toda $x\in\mathbb{R}$.

Problema 8 (3 puntos). *Un poste de teléfono de 7 pies de altura se encuentra sobre una misma calle a x pies de distancia de un poste de la CFE de 9 pies de altura. Un cable sale de la punta de cada poste y es atado al pie del otro, de forma que los cables se cruzan en algún punto entre los postes. ¿A qué altura del piso se cruzan los cables?*

Problema 9 (5 puntos). *Considere una elipse con un semi-eje mayor de $4\,\mathrm{cm}$ y un semi-eje menor de $3\,\mathrm{cm}$. Si estos dos ejes están alineados con las diagonales de un cuadrado y la elipse es tangente al cuadrado en cuatro puntos de contacto, ¿cuál es el área del cuadrado?*

Problema 10 (4 puntos). *Encuentre el valor mínimo de la función*

$$f(x)=3^{(x^2-2)^3+8}.$$