GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

## Nivel Bachillerato

Segunda Lista de Problemas 2022

23 de Septiembre – 15 de Octubre

**Problema 1** (4 puntos). *Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tres ángulos arbitrarios tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$. Pruebe que*

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1.$$

***Nota:** La argumentación debe ser válida para cualquier terna de valores de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ que cumpla las condiciones dadas.*

**Problema 2** (4 puntos). *Un entero positivo se dice ser* especial *si tiene todos sus dígitos iguales y se puede expresar como la suma de los cuadrados de tres impares consecutivos (por ejemplo, 5, 7 y 9 son tres impares consecutivos). Encuentre todos los números especiales de cuatro dígitos.*

**Problema 3** (4 puntos). *Se sabe que un triángulo tiene todos sus lados enteros, su perímetro es 9 y uno de sus lados mide 3. ¿Cuánto pueden medir los otros dos lados del triángulo? Dar todas las posibilidades.*

**Problema 4** (3 puntos). *Sean $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ y $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ para todo entero $n$ mayor o igual a $1$. Encuentre el valor de $f_{2023}(2022)$.*

**Problema 5** (5 puntos). *Encuentre todos los números que cumplan la ecuación*

***TWENTY + TWENTY + THIRTY = SEVENTY**,*

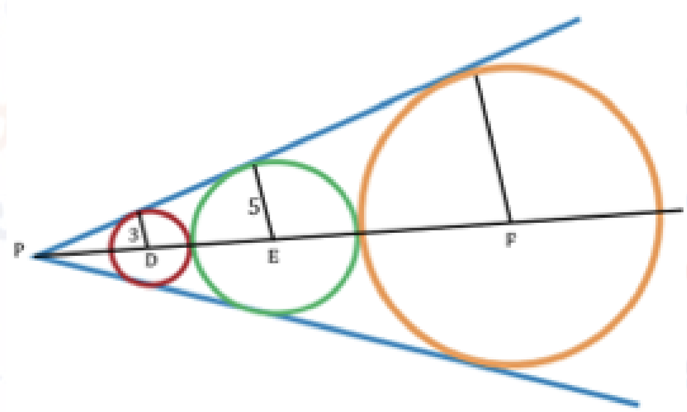
*en la que cada letra representa un dígito y THIRTY es múltiplo de 30.*

**Problema 6** (4 puntos). *Sean $A$ y $B$ los puntos de contacto de las dos tangentes a un círculo trazadas desde un punto externo $O$. Construya la cuerda $AC$ paralela a $OB$ y la secante $OC$. Llamémosle $E$ al punto de intersección de la secante con el círculo. La recta $AE$ corta a $OB$ en $K$. Calcule el valor de $OK/KB$.*

**Problema 7** (4 puntos). *Si $f(x) = \sqrt{-x}$ y $g(x) = \frac{x^2-5}{x+1}$, determine el dominio de $f(g(x))$.*

**Problema 8** (4 puntos). *Sean $ABCD$ un rectángulo y $P$ un punto sobre el lado $CD$. La recta $AP$ corta a la recta $BC$ en el punto $T$. Si $M$ es el punto medio de $BC$, se observa que el ángulo $APM$ es el doble del ángulo $ATB$. Si el área del triángulo $CTP$ es $10 \text{ cm}^2$, calcule el área del rectángulo $ABCD$.*

**Problema 9** (5 puntos). *En la siguiente figura se muestran tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes. Si el radio del círculo pequeño es $3$ y el del círculo mediano es $5$, ¿cuál es el radio del círculo grande?*




**Problema 10** (3 puntos). *Un canguro juega a saltar de la siguiente manera: en el periodo $n$ da $x_n$ saltos, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, de acuerdo a la siguiente regla:*

$$x_{n+1} = 2x_n$$

*Si en el primer periodo el canguro da $x_1 = 5$ pasos, ¿cuántos períodos debe jugar el canguro para haber brincado más de $300$ saltos en total?*