GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

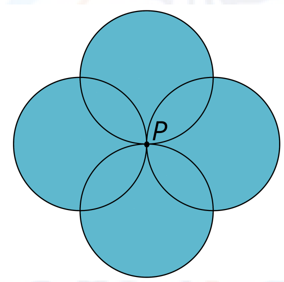
Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

Nivel Bachillerato

Tercera Lista de Problemas 2022

16 de Octubre – 07 de Noviembre

Problema 1 (3 puntos). *En la figura, todas las circunferencias son del mismo radio y se intersecan en el punto P. Además, las circunferencias se cortan perpendicularmente o son tangentes. Si el perímetro de la figura es 24π, ¿cuánto vale su área?*

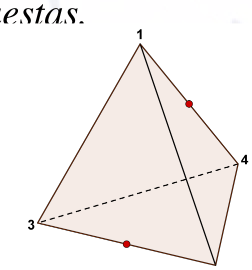


Problema 2 (3 puntos). *Para todo entero positivo n, la suma*

$$1+\sqrt{1+2^3}+\sqrt{1+2^3+3^3}+\sqrt{1+2^3+3^3+4^3}+\cdots+\sqrt{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}$$

se puede expresar de la forma An^3+Bn^2+Cn+D, para ciertos números reales A, B, C y D. ¿Cuáles son los valores de A, B, C y D? Explique por qué el resultado de dicha suma es siempre un número natural. Justifique sus respuestas.

Problema 3 (4 puntos). *En la figura, se muestra un tetraedro cuyas aristas miden 5 cm y se han marcado en rojo los puntos medios de dos aristas opuestas. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria más corta sobre las caras del tetraedro que une los puntos señalados?*



Problema 4 (4 puntos). *Diremos que un entero positivo es* 4-mágico *si su primer dígito de izquierda a derecha en notación decimal es 4 y cuando este dígito se recorre al lugar de las unidades se obtiene $1/4$ del entero positivo inicial. Por ejemplo, al recorrer el primer dígito de* 410256 *al lugar de las unidades se obtiene* 102564*, el cual es $1/4$ de* 410256*. Determine todos los números 4-mágicos de seis dígitos o menos.*

Problema 5 (4 puntos). *Considere la función* $f(x) = x^2 + 12x + 30$. *Determine todos los números reales* x *tales que* $f(f(f(f(f(x))))) = 0$.

Problema 6 (4 puntos). *Considere un triángulo* $\triangle ABC$ *de área* S *y sean* a, b *y* c *las longitudes de los lados* BC, CA *y* AB, *respectivamente. Una circunferencia de centro* O *y radio* r *es tangente a los lados* CA *y* AB. *Exprese la distancia* x *del punto* O *al lado* BC *en términos de* S, a, b, c *y* r *en los siguientes casos:*

(a) *El punto* O *está en el interior del triángulo* $\triangle ABC$.

(b) *El punto* O *está en el interior del ángulo* $\angle BAC$, *pero fuera del triángulo* $\triangle ABC$.

Problema 7 (4 puntos). *Determine todos los números naturales* n *tales que el producto de sus dígitos (en notación decimal) es igual a* $n^2 - 25n + 158$.

Problema 8 (4 puntos). *Sean* $B = (-1, 0)$ *y* $C = (1, 0)$ *puntos en el plano. Considere el lugar geométrico* $\mathcal{K}$ *de los puntos* $A = (x, y)$ *tales que la diferencia de los ángulos* $\angle ABC$ *y* $\angle ACB$ *es un ángulo recto.*

(a) *Obtenga una ecuación del lugar geométrico* $\mathcal{K}$ *(en términos de* x *y* y*).*

(b) *Pruebe que* $\mathcal{K}$ *es una cónica y calcule su excentricidad.*

Problema 9 (5 puntos). *Sean* α, β *y* γ *ángulos agudos y positivos. Apoyándose en la gráfica de* $y = \cos(x)$, *pruebe que*

(a) $\dfrac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}{2} \leqslant \cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$,

(b) $\dfrac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{3} \leqslant \cos\left(\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$.

Problema 10 (5 puntos). *Sean* a, b *y* c *números reales y considere tres ángulos* α, β *y* γ *tales que*

$$a = \tan\alpha, \qquad b = \tan\beta \quad y \quad c = \tan\gamma.$$

(a) *Suponga que* α, β *y* γ *son ángulos internos de un triángulo. Pruebe que* $abc = a + b + c$.

(b) *Suponga que* $abc = a + b + c$. *Demuestre que* $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

(c) *Suponga que* a, b *y* c *son positivos y que* $abc = a + b + c$. *Demuestre que*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$