GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA
ESTADO DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

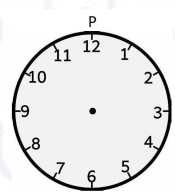
Nivel Bachillerato

Soluciones de la Primera Lista de Problemas 2022

31 de Agosto – 22 de Septiembre

Problema 1 (4 puntos)**.** *Lili e Isabel corren por una pista circular, ambas comenzando en un punto P. Lili corre a una velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj. Isabel también corre en el sentido de las manecillas del reloj a una velocidad constante, pero lo hace un 25 % más rápido que Lili. Lili comienza a correr primero e Isabel comienza a correr cuando Lili ha completado un tercio de una vuelta. Cuando Isabel rebasa a Lili por quinta vez, ¿cuántas veces ha pasado Lili por el punto P?*

Solución. Supongamos que la pista circular en la que corren Lili (L) e Isabel (I) está marcada por doce divisiones, como las horas de un reloj, y que el punto P es el que marca las 12:



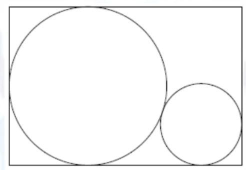
Supongamos además que L da una vuelta completa cada doce minutos, de manera que recorre una "hora del reloj" por minuto. Entonces, cada cuatro minutos I avanza cinco horas de reloj. Sabemos que I empieza a correr cuando L se encuentra en las 4 hrs. Luego, tras cuatro minutos, L se encuentra en las 8 hrs, mientras que I en las 5 hrs. Entonces, si considerando bloques de cuatro minutos, se tiene que I alcanza a L por primera vez después de 4 bloques (de cuatro minutos) estando ambas en las 8 hrs y habiendo L pasado una vez por P.

Ahora, un punto clave es notar que, una vez que I y L están en un mismo punto (las 8 hrs), se volveran a encontrar hasta los 12 bloques y justo en las 8 horas, pasando L otras 4 veces por el punto P. Esto mismo ocurre tres veces más hasta lograrse el quinto encuentro, equivalente al quinto rebase. Por lo tanto, en el quinto rebase de I a L, esta última habrá pasado 17 veces por el punto P:

Cuando ambas empiezan a correr	1° encuentro	2° encuentro	3° encuentro	4° encuentro	5° encuentro
P	4 módulos/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs
4 hora	4 módulos/ a las 8 hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs	12 módulos más/ a las 8hrs
Num. de veces que pasa Lili el punto *P* en el periodo indicado	1 vez	4 veces	4 veces	4 veces	4 veces

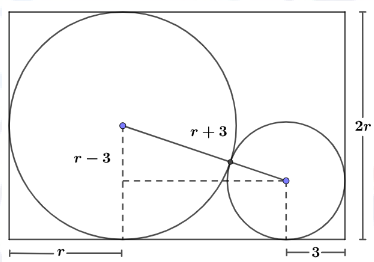
$\blacksquare$

Problema 2 (4 puntos)**.** *Dos circunferencias tangentes exteriormente se encuentran en el interior de un rectángulo. La circunferencia pequeña, que tiene radio 3, es tangente a dos lados del rectángulo, mientras que la más grande es tangente a tres lados del rectángulo como se muestra en la figura:*



Si el área del rectángulo es 98, ¿cuál es el valor del radio de la circunferencia más grande?

Solución. Sea r el radio de la circunferencia más grande y considere el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento de recta que une a los centros de las circunferencias del problema:



Por el teorema de Pitágoras, sabemos que la base del triángulo rectángulo es

$$\sqrt{(r+3)^2-(r-3)^2}=\sqrt{12r}=2\sqrt{3r}$$

y en consecuencia, la base del rectángulo es $r+2\sqrt{3r}+3=(\sqrt{r}+\sqrt{3})^2$.

Dado que el área del rectángulo es 98, tenemos que

$$98=2r(\sqrt{r}+\sqrt{3})^2=2(r+\sqrt{3r})^2,$$

lo cual implica que $r+\sqrt{3r}-7=0$. Haciendo el cambio $w=\sqrt{r}$, para resolver el problema bastará encontrar las raíces postivas de

$$w^2+\sqrt{3}w-7=0.$$

Usando la fórmula general, se obtiene que la unica raíz positiva de la ecuación es $w=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{31}}{2}$. En consecuencia, es $r=w^2=\frac{17-\sqrt{93}}{2}$. ■

Problema 3 (3 puntos)**.** *Considere la función f definida en el conjunto de los enteros de la siguiente forma:*

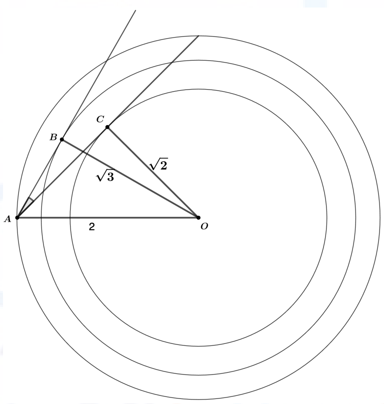
$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \textit{si } n \textit{ es par} \\ n^2-1 & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$$

Encuentre todos los enteros n que satisfacen la ecuación $f(f(n)) = 8$.

Solución. Primero notemos que las únicas soluciones para $f(m) = 8$ son $m = 3$ y $m = -3$. Por otro lado, es $f(n) = 3$ sólo si $n = 4$ y es $f(n) = -3$ sólo si $n = -2$. Por tanto, las únicas soluciones posibles son $n = 4$ y $n = -2$. ■

Problema 4 (4 puntos)**.** *Considere tres circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, todas con centro en un mismo punto O, cuyas respectivas áreas son 4π, 3π y 2π. Desde un punto A sobre $\mathcal{C}_1$ se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_2$, siendo B el punto de tangencia, y se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_3$, siendo C el punto de tangencia. Si B y C están en el mismo lado de OA, determine el valor del ángulo $\measuredangle BAC$.*

Solución. Primero, dado que las áreas de los círculos son 2π, 3π y 4π, entonces los radios de los círculos son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y 2, respectivamente. Considere la siguiente figura con los tres círculos con el mismo centro O, el punto A sobre el círculo más grande y los puntos de tangencia B y C trazados desde el punto A.



Como B y C son puntos de tangencia, y el radio es perpendicular a la tangente, se tiene que $\measuredangle ABO = \measuredangle ACO = 90°$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ACO, tenemos que $AC = \sqrt{2}$, lo que implica que el triángulo $\triangle ACO$ es un triángulo rectángulo isóceles. De esta manera, se tiene que $\measuredangle CAO = 45°$. Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ABO, tenemos que $AB = 1$. Puesto que es $AB = 1$, $BO = \sqrt{3}$ y $OA = 2$, se sigue que $\triangle ABO$ es un triángulo rectángulo notable, obtenido por ejemplo como la mitad de un triángulo equilátero de lado 2 en el que se ha trazado una altura Así, resulta que $\measuredangle BAO = 60°$. Por lo tanto, es $\measuredangle BAC = 15°$. ■

Problema 5 (4 puntos). *Demuestre la siguiente identidad:*

$$\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(4x) \cdots \cos(2^{2022}x) = \frac{\operatorname{sen}(2^{2023}x)}{2^{2023}\operatorname{sen}(x)}$$

Solución. Considere la identidad $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$. Despejando el coseno y haciendo $\alpha = 2^k x$, obtenemos que

$$\cos(2^k x) = \frac{\operatorname{sen}(2^{k+1}x)}{2\operatorname{sen}(2^k x)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2022.$$

Ahora, sustituyendo cada coseno que aparece en la expresión del lado izquierdo de la igualdad del problema en términos de la relación anterior, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{2\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(8x)}{2\operatorname{sen}(4x)} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}(2^{2023}x)}{2\operatorname{sen}(2^{2022}x)}.$$

Finalmente, cancelando términos iguales arriba y abajo, la expresión obtenida se reduce a la expresión del lado derecho de la igualdad, probando la identidad deseada. ■

Problema 6 (4 puntos). *Una sucesión* tipo Fibonacci *es una sucesión* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *en la que* a_1 *y* a_2 *son números positivos y*

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \qquad \textit{para } n \geq 3.$$

Si $a_1, a_2, \ldots, 107, \ldots$ *es la sucesión tipo Fibonacci que contiene a 107 y tiene el mayor número posible de términos precediendo a 107, ¿cuáles son los valores de* a_1 *y* a_2*?*

Solución. Primero observe que, dados dos términos consecutivos de la sucesión, a_{n-1} y a_n, el término anterior se obtiene como $a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$. Ahora, sea $x \in \mathbb{N}$ el término de la sucesión inmediato anterior a 107. Entonces, los términos anteriores son $107 - x$, $2x - 107$, $214 - 3x$, $5x - 321$, $535 - 8x$, $13x - 856$, $1391 - 21x$, $34x - 2247$, etc. Para que todos estos términos sean positivos, debe pasar que $x < 107$, $x > 53$, $x < 72$, $x > 64$, $x < 67$, $x > 65$, $x < 67$, $x > 66$. Como x es un número natural, la última desigualdad no es compatible con las anteriores. Además, como $x > 65$ y $x < 67$, se obtiene que $x = 66$ y la sucesión hasta el 107 es $5, 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107$. Así, se tiene que $a_1 = 5$ y $a_2 = 2$. ■

Problema 7 (5 puntos)**.** *Demuestra que se satisface la desigualdad*

$$5\operatorname{sen}(x+37^\circ)+\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)\leqslant\sqrt{41}$$

para toda $x\in\mathbb{R}$.

Solución. Sea k el valor máximo de $5\operatorname{sen}(x+37^\circ)+\sqrt{2}\text{cos}(x-45^\circ)$. Utilizando las identidades de la suma del seno y coseno obtenemos

$$\begin{aligned}k&=5(\operatorname{sen}x\cos(37^\circ)+\cos x\ \ \operatorname{sen}(37^\circ))+\sqrt{2}(\cos x\ \ \cos(45^\circ)+\operatorname{sen}x\ \ \operatorname{sen}(45^\circ))\\&=5\operatorname{sen}x\cdot\cos(37^\circ)+5\cos x\cdot\operatorname{sen}(37^\circ)+\sqrt{2}\ \ \cos x\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\ \ \operatorname{sen}x\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\&=\operatorname{sen}x\ \ (5\cos(37^\circ)+1)+\cos x\ \ (5\operatorname{sen}(37^\circ)+1).\end{aligned}$$

Llamemos

$$A=5\cos(37^\circ)+1\qquad\text{y}\qquad B=5\operatorname{sen}(37^\circ)+1.$$

Entonces, por lo anterior, es $k=A\operatorname{sen}x+B\cos(x)$. Dividiendo entre $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\frac{k}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A\operatorname{sen}x}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B\cos x}{\sqrt{A^2+B^2}}\tag{1}$$

Utilizando el triángulo rectángulo con ángulo θ, cateto adyacente A, cateto opuesto B e hipotenusa $\sqrt{A^2+B^2}$, la ecuación (1) se reescribe como

$$\tfrac{k}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\theta\ \ \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\theta\ \ \cos x,$$

luego $\frac{k}{\sqrt{A^2+B^2}}=\operatorname{sen}(\theta+x)$ y, por tanto, es

$$k=\sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(\theta+x).$$

De esta manera, el máximo valor de $5\operatorname{sen}(x+37^\circ)+\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)$ es

$$k=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(5\cos(37^\circ)+1)^2+(5\operatorname{sen}(37^\circ)+1)^2}.$$

■

Comentario: Hemos visto que el máximo de $5\operatorname{sen}(x+37^\circ)+\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)$ es

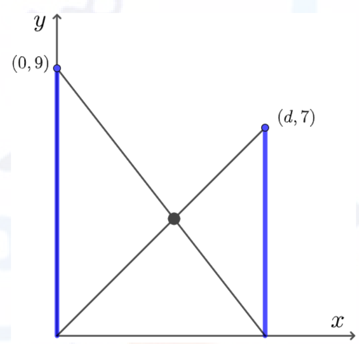
$$\sqrt{(5\cos(37^\circ)+1)^2+(5\operatorname{sen}(37^\circ)+1)^2}\approx 6.403476035091676.$$

Por tanto, la cota presentada en el enunciado del problema es incorrecta, ya que es menor que la verdadera (aunque muy cercana):

$$\sqrt{41}\approx 6.4031242374328485$$

Problema 8 (3 puntos)**.** *Un poste de teléfono de 7 pies de altura se encuentra sobre una misma calle a x pies de distancia de un poste de la CFE de 9 pies de altura. Un cable sale de la punta de cada poste y es atado al pie del otro, de forma que los cables se cruzan en algún punto entre los postes. ¿A qué altura del piso se cruzan los cables?*

Primera solución. En esta solución, le llamaremos d a la distancia entre los postes, en lugar de x. Suponga que la base del poste de 9 pies se encuentra en el punto $(0, 0)$ del plano cartesiano y que la base del poste de 7 pies de altura se encuentra en el punto $(d, 0)$, como se muestra en la figura:



Los cables que salen de las puntas de los postes se encontrarán sobre las rectas

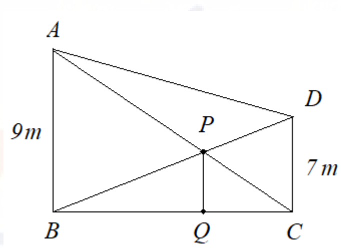
$$y = \tfrac{7}{d}x \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{9}{d}x + 9.$$

Luego, el punto donde ambos cables se cruzan coincide con el punto donde se cortan ambas rectas. Para encontrar las coordenadas de dicho punto resolvemos la ecuación

$$\tfrac{7}{d}x = -\tfrac{9}{d}x + 9,$$

con lo cual obtenemos $x = \frac{9d}{16}$, y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones de las rectas obtenemos la altura del punto, a decir $y = \frac{63}{16}$. ∎

Segunda solución. Sean A y B los extremos del poste de la CFE y sean C y D los extremos del poste de teléfono, con B y C la base de cada poste. Llamémosle P al punto de intersección de los cables:



Puesto que AB y CD son perpendiculares a BC, son paralelas entre sí. Luego, es $\angle BAP = \angle PCD$, por ser los ángulos alternos internos que la recta AC forma con dichas paralelas. Análogamente, es $\angle ABP = \angle PDC$. De ambas igualdades, se sigue la semejanza de triángulos $\triangle ABP \sim \triangle CDP$, por lo que es

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{7}.$$

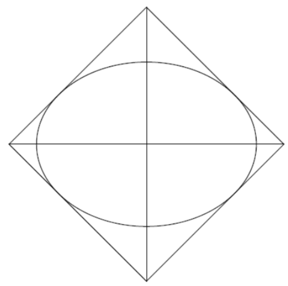
Sea Q el pie de la perpendicular bajada desde P sobre BC. Nuevamente, por ser PQ paralela a AB, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQC$ son semejantes, con

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC} = \frac{AP + PC}{PC} = \frac{AP}{PC} + 1 = \frac{9}{7} + 1 = \frac{16}{7}.$$

Por lo tanto, es $PQ = \frac{7}{16} AB = \frac{7}{16}(9\text{m}) = \frac{63}{16}\text{m}$. ■

Problema 9 (5 puntos). *Considere una elipse con un semi-eje mayor de* 4 cm *y un semi-eje menor de* 3 cm. *Si estos dos ejes están alineados con las diagonales de un cuadrado y la elipse es tangente al cuadrado en cuatro puntos de contacto, ¿cuál es el área del cuadrado?*

Solución. Considere la siguiente figura:



Por construcción, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

y la ecuación de dos de los lados del cuadrado es de la forma $y = x+k$. Sustituyendo la ecuación de la recta en la ecuación de la elipse y desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} + \frac{(x+k)^2}{9} &= 1, \\ \tfrac{9}{16}x^2 + x^2 + 2kx + k^2 &= 9, \\ \tfrac{25}{16}x^2 + 2kx + (k^2-9) &= 0. \end{aligned}$$

Nótese que esta es una ecuación cuadrática en x, de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, con $A = \frac{25}{16}$, $B = 2k$ y $C = (k^2 - 9)$. Luego, para que la recta y la elipse sean tangentes, esta ecuación debe tener una única solución (de multiplicidad 2), por lo que su discriminante $B^2 - 4AC$ debe ser cero:

$$\begin{aligned} 4k^2 - 4\left(\tfrac{25}{16}\right)(k^2-9) &= 0, \\ -\tfrac{9}{4}k^2 &= -9\tfrac{25}{4}, \\ k^2 &= 25. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de dos de los lados del cuadrado son $y = x + 5$ y $y = x - 5$, las cuales cortan al eje y en los puntos $(0, 5)$ y $(0, -5)$, respectivamente. De aquí, las diagonales del cuadrado miden 10 cm, y cada lado mide entonces $5\sqrt{2}\text{ cm}$. Por lo tanto el área del cuadrado es de 50 cm^2. ■

Problema 10 (4 puntos)**.** *Encuentre el valor mínimo de la función*

$$f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8}.$$

Primera solución. Considere la función $g(x) = (x^2 - 2)^3 + 8$. Puesto que las funciones exponenciales son crecientes, la función f toma su valor mínimo en el mismo punto que lo toma la función g. Por otra parte, podemos reescribir la función g como

$$g(x) = x^6 - 6x^4 + 12x^2 = x^2[(x^2 - 3)^2 + 3].$$

Notemos que el valor mínimo de la función g es 0 en el punto $x = 0$. Por tanto, el valor mínimo de la función f se da en el punto $x = 0$ y es $f(0) = 3^0 = 1$. ■

Segunda solución. Considere las funciones

$$a(x) = 3^x, \qquad b(x) = x^3 + 8 \quad \text{y} \quad c(x) = x^2 - 2$$

y observe que es

$$f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8} = a(b(c(x))).$$

Puesto que a y b son ambas funciones crecientes, se sigue que f toma su valor mínimo en el mismo punto que lo toma la función $c(x) = x^2 - 2$. Esta última es una parábola que abre hacia arriba, cuyo vértice se ubica en $(0, -2)$. Por lo tanto, el valor mínimo de c se alcanza en $x = 0$, y es $f(0) = a(b(-2)) = a(0) = 1$. ■