GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

## Nivel Bachillerato

Soluciones a la Segunda Lista de Problemas 2022

23 de Septiembre – 15 de Octubre

**Problema 1** (4 puntos)**.** *Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tres ángulos arbitrarios tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$. Pruebe que*

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1.$$

***Nota:*** *La argumentación debe ser válida para cualquier terna de valores de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ que cumpla las condiciones dadas.*

*Solución.* Recordemos la identidad $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$, válida para $0 < \theta < \pi/2$. También tenemos la siguiente identidad para la tangente de la suma de dos ángulos:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

De la condición del problema, tenemos que $\gamma = \pi/2 - (\alpha+\beta)$. Entonces, es

$$\begin{aligned}
\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha &= \tan\alpha\tan\beta + \tan\gamma(\tan\alpha + \tan\beta) \\
&= \tan\alpha\tan\beta + \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)(\tan\alpha + \tan\beta) \\
&= \tan\alpha\tan\beta + \cot(\alpha+\beta)(\tan\alpha + \tan\beta) \\
&= \tan\alpha\tan\beta + \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}(\tan\alpha + \tan\beta) \\
&= \tan\alpha\tan\beta + \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}(\tan\alpha + \tan\beta) \\
&= \tan\alpha\tan\beta + 1 - \tan\alpha\tan\beta \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

**Problema 2** (4 puntos)**.** *Un entero positivo se dice ser* especial *si tiene todos sus dígitos iguales y se puede expresar como la suma de los cuadrados de tres impares consecutivos (por ejemplo, 5, 7 y 9 son tres impares consecutivos). Encuentre todos los números especiales de cuatro dígitos.*

*Solución.* Sea $N$ un número especial. Entonces existe un entero impar $x$ tal que

$$N = (x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 8.$$

En particular, como $x$ es impar entonces $N$ debe ser impar también. Entonces todos sus dígitos son $1, 3, 5, 7$ o $9$. Por otro lado, de la ecuación de arriba se tiene que $N$ no es múltiplo de $3$, por lo que descartamos que sus dígitos sean $3$ o $9$. Luego, observando que $N-8$ debe ser múltiplo de $3$ descartamos al $1$ y al $7$ como posibilidades, pues ni $1111-8=1103$ ni $7777-8=7771$ son múltiplos de $3$. Esto nos deja con la única posibilidad $N=5555$ el cual verificamos que funciona con $x=43$, es decir, es suma de $41^2$, $43^2$ y $45^2$. ■

**Problema 3** (4 puntos)**.** *Se sabe que un triángulo tiene todos sus lados enteros, su perímetro es 9 y uno de sus lados mide 3. ¿Cuánto pueden medir los otros dos lados del triángulo? Dar todas las posibilidades.*

*Solución.* Recordemos que, si $a$, $b$ y $c$ son las longitudes de los lados de cualquier triángulo, entonces debe de satisfacerse la llamada *desigualdad del triángulo*, la cual nos dice que la suma de las longitudes de dos lados debe ser mayor que la longitud de su tercer lado:

$$a+b>c, \quad a+c>b, \quad b+c>a$$

Volviendo al problema, supongamos que es $c=3$. Entonces, la condición de ser de perímetro 9 nos dice que

$$a+b=6,$$

lo cual nos deja las siguientes posibilidades para la pareja $(a,b)$:

$$(1,5), \qquad (2,4), \qquad (3,3), \qquad (4,2) \qquad \text{y} \qquad (5,1)$$

Ahora observamos que con las parejas $(a,b)=(1,5)$ y $(a,b)=(5,1)$ no se forma triángulo con lado $c=3$, pues ocurre que $a+c<b$ en el primer caso y $b+c<a$ en el segundo. Con las parejas $(a,b)=(2,4)$, $(a,b)=(3,3)$ y $(a,b)=(4,2)$ sí se satisfacen las desigualdades

$$a+b>c, \quad a+c>b, \quad b+c>a,$$

lo cual abarca todas las posibilidades. Observemos, además, que la primera y tercera parejas nos dan triángulos congruentes, por lo que realmente son dos posibilidades distintas. ■

**Problema 4** (3 puntos)**.** *Sean* $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ *y* $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ *para todo entero* $n$ *mayor o igual a* $1$. *Encuentre el valor de* $f_{2023}(2022)$.

*Solución.* Primeramente, observemos que

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x},$$
$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x,$$
$$f_3(x) = f_0(f_2(x)) = f_0(x),$$

lo cual nos dice que cada tres composiciones de $f_0$ consigo misma da como resultado nuevamente $f_0$. Por lo tanto, es

$$f_{3n}(x) = f_0(x)$$

para todo entero positivo $n$. Por otro lado, al ser $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, entonces se tiene

$$f_{2023}(x) = f_0(f_{3\times 674}(x)) = f_0(f_0(x)) = f_1(x),$$

por lo que es

$$f_{2023}(2022) = f_1(2022) = \frac{2021}{2022}.$$

■

**Problema 5** (5 puntos)**.** *Encuentre todos los números que cumplan la ecuación*

***TWENTY + TWENTY + THIRTY = SEVENTY***,

*en la que cada letra representa un dígito y THIRTY es múltiplo de 30.*

*Solución.* Para seguir con mayor facilidad los pasos del cálculo, escribamos la suma en forma vertical:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{Y} \\ & \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{Y} \\ & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{I} & \mathrm{R} & \mathrm{T} & \mathrm{Y} \\ \hline \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{V} & \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{Y} \end{array}$$

Como $30|$THIRTY, debemos tener que **Y=0**. Pero entonces, al ser cada letra un dígito diferente, de la segunda columna deducimos que necesariamente es **T=5**, y de la sexta columna que **S=1** y **E=6 o 7** (ya que al sumar la quinta columna podemos "llevar" a la sexta sólo 1 o 2, porque W, W y H son dígitos).

Ahora, de la tercera columna vemos que

$$(1 + \mathrm{N} + \mathrm{N} + \mathrm{R}) = 10 + \mathrm{N} \qquad \text{o} \qquad (1 + \mathrm{N} + \mathrm{N} + \mathrm{R}) = 20 + \mathrm{N}.$$

pero la segunda igualdad es imposible, pues implicaría que N+R=19. Por lo tanto, la primera se verifica y de ella se desprende que es **N+R=9**. Análogamente, se tiene que **E+I=9**. Tomando en cuenta que es E=6 o 7, se infiere que es $(\mathrm{E}, \mathrm{I}) = (6, 3)$ o $(7, 2)$; en el primer caso los dígitos N y R pueden ser 2 o 7 y en el segundo caso, 6 o 3. De cualquier manera, observemos que los dígitos que quedan disponibles para W, H y V son 4, 8 y 9.

Se ve ahora que la ecuación

$$2\mathrm{W} + \mathrm{H} + 1 = \mathrm{V} \mod 10,$$

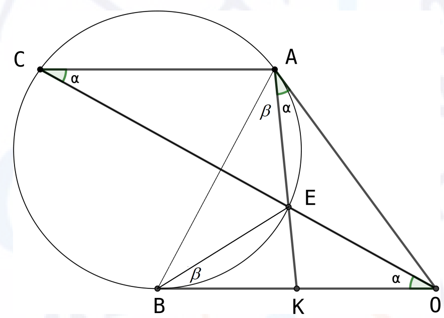
dada en la quinta columna, tiene por única solución **(W,H,V)=(4,9,8)**. Al sumar en la quinta y "llevar" a la sexta columna, se sigue que es **(E,I)=(6,3)**. Ahora, si (N,R)=(2,7), el resultante THIRTY es 593750, el cual no es divisible por 30. Por lo tanto, es **(N,R)=(7,2)**, arrojando la única solución

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & 4 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & 5 & 4 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ & 5 & 9 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 8 & 6 & 7 & 5 & 0 \end{array}$$

de donde vemos que THIRTHY$= 593250 = 30 \cdot 19775$. ■

**Problema 6** (4 puntos)**.** *Sean $A$ y $B$ los puntos de contacto de las dos tangentes a un círculo trazadas desde un punto externo $O$. Construya la cuerda $AC$ paralela a $OB$ y la secante $OC$. Llamémosle $E$ al punto de intersección de la secante con el círculo. La recta $AE$ corta a $OB$ en $K$. Calcule el valor de $OK/KB$.*

*Solución.* Primero observemos que los tres ángulos marcados con $\alpha$ en la siguiente figura son iguales: la igualdad $\angle BOC = \angle OCA$ se debe a que son ángulos alternos internos entre las paralelas $AC$ y $OB$; mientras que la igualdad $\angle ECA = \angle EAO$ se debe a que, en la circunferencia, el ángulo $\angle ECA$ es *inscrito* (con sus tres vértices sobre la circunferencia) y $\angle EAO$ es *semi-inscrito* (se forma entre una tangente y una cuerda) y ambos subtienden el arco $\widehat{AE}$.




Observe entonces que los triángulos $AOK$ y $OEK$ son semejantes, ya que el ángulo en $K$ es común y, además, ambos tienen un ángulo $\alpha$. Entonces, sus lados son proporcionales, es decir, es

$$\frac{OK}{AK} = \frac{EK}{OK} \quad \Longrightarrow \quad OK^2 = AK \cdot EK.$$

De manera similar, como $KB$ es tangente a la circunferencia, se tiene que $\angle EAB = \angle EBK$ (ambos marcados con $\beta$), ya que el primero de ellos es ángulo inscrito, el segundo es semi-inscrito y ambos subtienden el arco $\widehat{BE}$. Entonces, se sigue la semejanza de triángulos $\triangle AKB \sim \triangle BKE$, es decir, es $AK/KB = BK/KE$, por lo que

$$KB^2 = AK \cdot EK = OK^2$$

(o sea, el producto del segmento exterior de la secante con toda su longitud es igual al cuadrado del segmento de la tangente); así que es $OK = KB$ y entonces el cociente pedido $OK/KB$ es igual a 1. ■

**Problema 7** (4 puntos)**.** *Si* $f(x) = \sqrt{-x}$ *y* $g(x) = \frac{x^2-5}{x+1}$*, determine el dominio de* $f(g(x))$.

*Solución.* Primeramente observamos que

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{5-x^2}{x+1}},$$

por lo que buscamos los valores de $x$ tales que

$$\frac{5-x^2}{x+1} \geq 0.$$

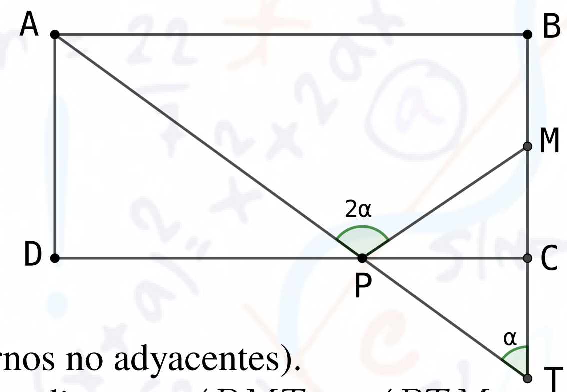
Una posibilidad es que $5 - x^2 \geq 0$ y $x + 1 > 0$. La condición $5 - x^2 \geq 0$ se logra cuando $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$, por lo que esta posibilidad consiste en todos los $x$ en el intervalo $(-1, \sqrt{5}]$.

Otra posibilidad es que $5 - x^2 \leq 0$ y $x + 1 < 0$. La condición $5 - x^2 \leq 0$ se logra cuando $x \leq -\sqrt{5}$ o $x \geq \sqrt{5}$; y observando que $x \geq \sqrt{5}$ y $x < -1$ no es posible, y que al cumplir $x \leq -\sqrt{5}$ se tiene automáticamente $x < -1$, concluimos que esta posibilidad consiste en todos los $x$ en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}]$.

Por lo tanto, el dominio de $f \circ g$ es $(-\infty, -\sqrt{5}] \cup (-1, \sqrt{5}]$. ∎

**Problema 8** (4 puntos)**.** *Sean $ABCD$ un rectángulo y $P$ un punto sobre el lado $CD$. La recta $AP$ corta a la recta $BC$ en el punto $T$. Si $M$ es el punto medio de $BC$, se observa que el ángulo $APM$ es el doble del ángulo $ATB$. Si el área del triángulo $CTP$ es* $10\ \mathrm{cm}^2$, *calcule el área del rectángulo $ABCD$.*

*Solución.* En el triángulo $\triangle PMT$, sus ángulos internos suman $180°$, mientras que el ángulo exterior $\angle APM$ suma también $180°$ con el ángulo interior $\angle MPT$:




$$\angle APM + \angle MPT = 180°$$
$$\angle PTM + \angle TMP + \angle MPT = 180°$$

Comparando ambas igualdades, se sigue que

$$\angle APM = \angle PTM + \angle TMP$$

(el ángulo exterior es la suma de los dos internos no adyacentes).

Como $\angle APM = 2\angle PTM$, lo anterior nos dice que $\angle PMT = \angle PTM$, por lo que $\triangle TPM$ es un triángulo isósceles. Además, como $CP$ es perpendicular al lado $TM$, entonces $C$ es el punto medio de $TM$. En particular, el área de $CMP$ es igual a $10\ \mathrm{cm}^2$.

Por otro lado, los triángulos $DPA$ y $CPT$ son semejantes, pues se forman por la intersección de las transversales $AT$ y $DC$ cortando a las paralelas $AD$ y $CT$. Entonces, es

$$\frac{CP}{DP} = \frac{CT}{DA} = \frac{CM}{DA} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2},$$

así que $CP$ es la mitad de $PD$. Por lo tanto, es $CP = \frac{1}{3}CD$.

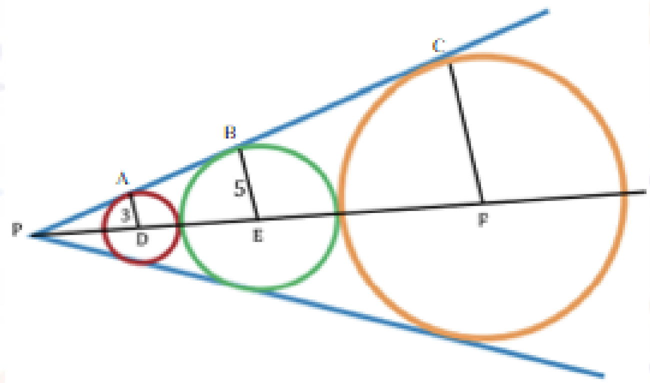
Finalmente, por ser $CB = 2CM$ y $CD = 3CP$, concluimos que el área del rectángulo es

$$CB \cdot CD = 6CM \cdot CP = 6 \cdot (20\mathrm{cm}^2) = 120\mathrm{cm}^2$$

■

**Problema 9** (5 puntos)**.** *En la siguiente figura se muestran tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes. Si el radio del círculo pequeño es* 3 *y el del círculo mediano es* 5*, ¿cuál es el radio del círculo grande?*

*Solución.* Sea $r$ el radio del círculo grande y llamémosles $A$, $B$ y $C$ a los puntos de tangencia, como se ha indicado en la figura:




Puesto que una recta tangente a una circunferencia son perpendicular a su radio por el punto, se tiene que los radios de la figura son paralelos, dando como resultado las semejanzas $\triangle PDA \sim \triangle PEB \sim \triangle PFC$. De ahí se sigue que

$$\frac{PD}{3} = \frac{PE}{5} = \frac{PF}{r}.$$

Si llamamos $d = PD$, entonces la primera ecuación es $\frac{d}{3} = \frac{d+3+5}{5} \to 5d = 3d+24$, la cual implica que

$$d = 12.$$

Luego, es $PE = 20$ y entonces es

$$PF = PE + 5 + r = 25 + r.$$

Finalmente, la ecuación $\frac{PE}{5} = \frac{PF}{r}$ es

$$\frac{20}{5} = \frac{25+r}{r} \longrightarrow 20r = 125 + 5r \longrightarrow r = \frac{25}{3}.$$

■

**Problema 10** (3 puntos)**.** *Un canguro juega a saltar de la siguiente manera: en el periodo $n$ da $x_n$ saltos, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, de acuerdo a la siguiente regla:*

$$x_{n+1} = 2x_n$$

*Si en el primer periodo el canguro da $x_1 = 5$ pasos, ¿cuántos períodos debe jugar el canguro para haber brincado más de $300$ saltos en total?*

*Solución.* De la regla para el número de saltos y tomando en cuenta que la primera vez da cinco saltos, tenemos que $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$, $x_4 = 40$, $x_5 = 80$, y $x_6 = 160$. Hasta el periodo 5, el número de saltos es

$$x_1 + \cdots + x_5 = 155,$$

que es menor que $300$, mientras que hasta el periodo 6, es $x_1 + \cdots + x_6 = 315 > 300$. Por tanto, el canguro debe jugar al menos 6 periodos. ■