GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA
ESTADO DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

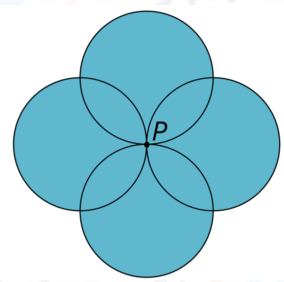
Primera Competencia Interestatal de Matemáticas por Equipos

Nivel Bachillerato

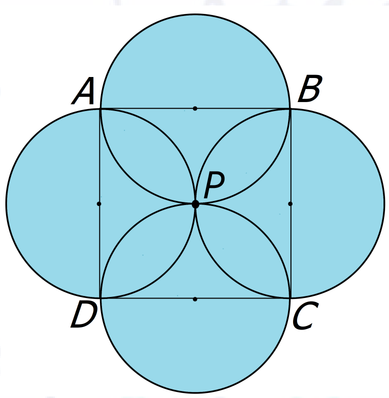
Tercera Lista de Problemas 2022

16 de Octubre – 07 de Noviembre

Problema 1 (3 puntos)**.** *En la figura, todas las circunferencias son del mismo radio y se intersecan en el punto P. Además, las circunferencias se cortan perpendicularmente o son tangentes. Si el perímetro de la figura es 24π, ¿cuánto vale su área?*



Solución. Debido a que los círculos se cortan perpendicularmente, los puntos de intersección A, B, C, D que se muestran en la siguiente figura, forman un cuadrado, cuyos lados son diámetros de los cuatro círculos:



El perímetro de la figura es igual al perímetro de dos cículos completos, de modo que si r representa el radio de cada círculo, entonces el perímetro de la figura es $2 \cdot (2\pi r)$. Así, se obtiene que $4\pi r = 24\pi$, es decir, es

$$r = 6.$$

Luego, el área de la figura es igual al área del cuadrado de lado 12, más el área de 4 semicírculos de radio 6:

$$\text{área} = 12 \times 12 + 4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (6)^2}{2}\right) = 144 + 72\pi$$

■

Problema 2 (3 puntos)**.** *Para todo entero positivo n, la suma*

$$1+\sqrt{1+2^3}+\sqrt{1+2^3+3^3}+\sqrt{1+2^3+3^3+4^3}+\cdots+\sqrt{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}$$

se puede expresar de la forma An^3+Bn^2+Cn+D, para ciertos números reales A, B, C y D. ¿Cuáles son los valores de A, B, C y D? Explique por qué el resultado de dicha suma es siempre un número natural. Justifique sus respuestas.

Primera solución. Para esta solución utilizaremos las siguientes fórmulas: La "fórmula de Gauss" para la suma de los k primeros números naturales,

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \tag{1}$$

La suma de los cuadrados de los k primeros números naturales,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{2}$$

La suma de los cubos de los k primeros números naturales,

$$1+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Ahora, dado que el argumento de cada raíz cuadrada en la suma del problema es la suma de los cubos de los k primeros números naturales (para $k=2,\ldots,n$), usando la fórmula (3) tenemos que

$$\begin{aligned}
&1+\sqrt{1+2^3}+\sqrt{1+2^3+3^3}+\sqrt{1+2^3+3^3+4^3}+\cdots+\sqrt{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}\\
=&\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)+\left(\frac{2(2+1)}{2}\right)+\left(\frac{3(3+1)}{2}\right)+\left(\frac{4(4+1)}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
=&\left(\frac{1^2+1}{2}\right)+\left(\frac{2^2+2}{2}\right)+\left(\frac{3^2+3}{2}\right)+\left(\frac{4^2+4}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2+n}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2\right)+\frac{1}{2}\left(1+2+3+4+\cdots+n\right)
\end{aligned}$$

En otras palabras, la suma del problema es igual a la mitad de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales más la mitad de la suma de los primeros n números naturales. En particular, *esto nos dice que el resultado de la* *suma es siempre un número natural* (ya que la primera igualdad nos dice que es la suma de números naturales). Luego, usando las fórmulas (1) y (2) tenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2\right)+\frac{1}{2}\left(1+2+3+4+\cdots+n\right)\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\=&\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$ y $D=0$. ■

Segunda solución.(Números Tetraédricos) Primero, notemos que si “combinamos” las fórmulas (1) y (3) tenemos que

$$1+2^3+\cdots+k^3=\left(1+2+\cdots+k\right)^2.$$

Es decir, la suma de los cubos de los k primeros números naturales es igual al cuadrado de la suma de los k primeros números naturales. Usando este hecho en la suma original del problema, tenemos que

$$\begin{aligned}&1+\sqrt{1+2^3}+\sqrt{1+2^3+3^3}+\sqrt{1+2^3+3^3+4^3}+\cdots+\sqrt{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}\\&=1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)\end{aligned} \qquad (\star)$$

En particular, *esto nos dice que el resultado de la suma es siempre un número natural* (ya que claramente es la suma de números naturales).

Calculemos la suma $(\star)$ para (digamos) los diez primeros números naturales:

n	suma $(\star)$	n	suma $(\star)$
1	1	6	56
2	4	7	84
3	10	8	120
4	20	9	165
5	35	10	220

Notemos que la sucesión de números 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220 la podemos localizar en la cuarta diagonal del triángulo de Pascal (Figura 1).

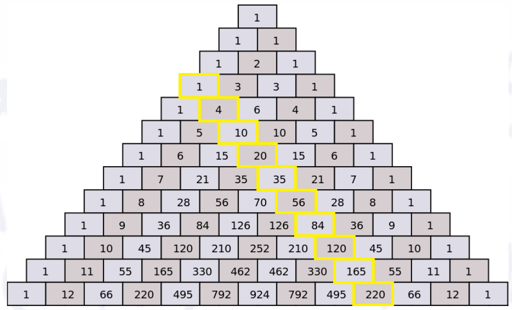


Figura 1: Cuarta diagonal del triángulo de Pascal.

De hecho, para cada número natural n, el resultado de la suma ($\star$) es igual al n–ésimo término de esta diagonal. Una manera de convencernos de esta afirmación es con lo siguiente : para cada natural k, la expresión $k(k+1)/2$ en la fórmula (1) es un coeficiente binomial. En efecto, es igual al número de "combinaciones de $k+1$ en 2",

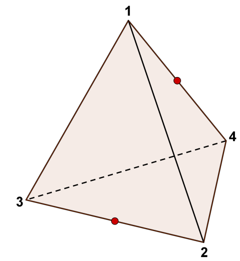
$$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + k. \tag{4}$$

Ahora, por definición/construcción del triángulo de Pascal (mediante coeficientes binomiales), el k-ésimo término de la tercera diagonal es precisamente el coeficiente binomial (4). Luego, *el k-ésimo término de la tercera diagonal es igual a la suma de los k primeros números naturales*. Nuevamente por definición/construcción del triángulo de Pascal, para cada natural n, *el n-ésimo término de la cuarta diagonal es igual a la suma de los primeros n términos de la tercera diagonal*, lo que (notemos) coincide con la suma ($\star$) buscada. Pero recordemos que, en términos de coeficientes binomiales, el n-ésimo término de la cuarta diagonal es dado por

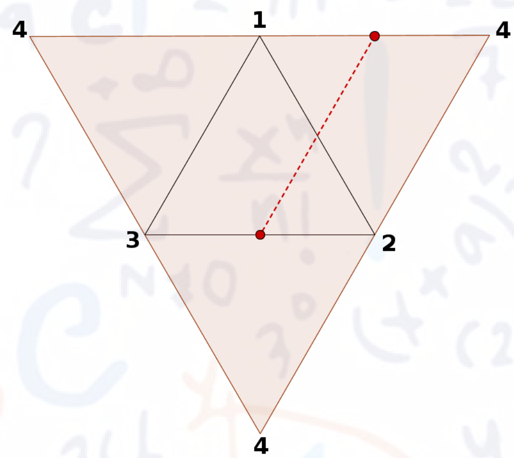
$$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n.$$

Por lo tanto, $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$ y $D = 0$. ■

Problema 3 (4 puntos)**.** *En la figura, se muestra un tetraedro cuyas aristas miden* 5 cm *y se han marcado en rojo los puntos medios de dos aristas opuestas. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria más corta sobre las caras del tetraedro que une los puntos señalados?*



Solución. Si desglozamos el tetraedro a una figura plana, obtenemos una figura formada por triángulos equiláteros de arista 5 cm:



Puesto que la trayectoria de menor longitud entre dos puntos sobre un plano es la línea recta, se sigue que una de las posibles trayectorias más cortas sobre el tetraedro corresponde al segmento de recta rojo de la figura, el cual conecta los puntos medios de dos lados opuestos de un rombo de lado 5 cm. Entonces, dicho segmento es paralelo a los otros dos lados y su longitud es también de 5 cm. ∎

Problema 4 (4 puntos)**.** *Diremos que un entero positivo es* 4-mágico *si su primer dígito de izquierda a derecha en notación decimal es* 4 *y cuando este dígito se recorre al lugar de las unidades se obtiene* $1/4$ *del entero positivo inicial. Por ejemplo, al recorrer el primer dígito de* 410256 *al lugar de las unidades se obtiene* 102564*, el cual es* $1/4$ *de* 410256*. Determine todos los números 4-mágicos de seis dígitos o menos.*

Primera solución. Por definición, sabemos que un número 4-mágico debe iniciar (*primer dígito*) y ser *divisible* por 4. Entonces, el 4 es el único candidato a ser un número 4-mágico de un dígito. Pero como claramente él no es un cuarto de sí mismo, se concluye que no hay números 4-mágicos de un dígito.

Los candidatos a ser números 4-mágicos de dos dígitos son 40, 44 y 48. Pero 04 y 84 no son un cuarto de 40 y 84, respectivamente. Luego, 40 y 48 no son números 4-mágicos. Finalmente, como claramente el número 44 no es un cuarto de sí mismo, se concluye que no hay números 4-mágicos de dos dígitos.

Ahora, mostraremos que *los últimos dos dígitos (decenas y unidades) de cualquier número 4-mágico de entre 3 y 6 dígitos deben ser 5 y 6*, respectivamente. En efecto, por definición, sabemos que cualquier número 4-mágico de entre 3 y 6 dígitos debe ser de la forma $4d_2d_3\cdots d_n$, con $3 \leq n \leq 6$ y $d_2, d_3, \ldots, d_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ dígitos del número. Dado que debe ser divisible por 4, tenemos la relación

$$4d_2d_3\cdots d_n = 4 \times (d_2d_3\cdots d_n4), \tag{$\star$}$$

donde $d_2d_3\cdots d_n4$ es el número que se obtiene al recorrer el 4 a la posición de las unidades. De esto, y recordando que todo entero positivo se puede expresar de manera *única* en términos de sumas de potencias de 10 (notación decimal), se sigue primeramente que el dígito d_n en las unidades deber ser 6:

$$\begin{aligned} 4d_2d_3\cdots d_n &= 4 \times (d_2d_3\cdots d_{n-1}0 + 10 \times d_n + 4) \\ &= 4 \times (d_2d_3\cdots d_{n-1}0) + 40 \times d_n + 16 \\ &= \underbrace{4 \times (d_2d_3\cdots d_{n-1}0) + 10 \times (4 \times d_n + 1)}_{x} + 6, \end{aligned}$$

donde el natural x tiene un cero en la posición de las unidades. Esto implica que las unidades del natural $x + 6$ es precisamente 6. Por lo que $d_n = 6$. Así, la relación

($\star$) se traduce en

$$\begin{aligned}4d_2d_3\cdots d_{n-1}6 &= 4\times(d_2d_3\cdots d_{n-1}64)\\ &= 4\times(d_2d_3\cdots d_{n-2}00+100\times d_{n-1}+64)\\ &= 4\times(d_2d_3\cdots d_{n-2}00)+400\times d_{n-1}+256\\ &= \underbrace{4\times(d_2d_3\cdots d_{n-1}0)+100\times(4\times d_{n-1}+2)}_{y}+10\times 5+6,\end{aligned}$$

donde el natural y tiene ceros en las posiciones de las decenas y las unidades. Esto implica que las decenas y las unidades del natural $y+10\times 5+6$ son 5 y 6, respectivamente. Por lo que $d_{n-1}=5$.

Tomando en cuenta todo lo anterior, podemos resolver el problema por casos.

3 dígitos: el 456 es el único candidato a ser número 4-mágico. Pero 564 no es un cuarto de 456. Entonces, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de tres dígitos.

4 dígitos: cualquier número 4-mágico deber ser de la forma $4d_256$, con $d_2\in\{0,\ldots,9\}$ el segundo dígito del número. En este caso, la relación ($\star$) se traduce en

$$\begin{aligned} & 4,056+100\times d_2 = 4,000\times d_2+2,256\\ \iff\quad & 3,900\times d_2 = 1,800\end{aligned}$$

Claramente, no existe un entero d_2 entre 0 y 9 que satisfaga esta última ecuación. Por lo tanto, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de cuatro dígitos.

5 dígitos: cualquier número 4-mágico deber ser de la forma $4d_2d_356$, con $d_2,d_3\in\{0,\ldots,9\}$ el segundo y tercer dígito del número, respectivamente. La relación ($\star$) se traduce en

$$\begin{gathered}40,056+1,000\times d_2+100\times d_3 = 40,000\times d_2+4,000\times d_3+224\\ \iff\\ 39,000\times d_2+3,900\times d_3 = 39,832\end{gathered}$$

Así, todo se reduce a verificar si existen parejas (d_2,d_3) de números enteros entre 0 y 9 que satisfacen esta última ecuación. Notemos que el lado izquierdo de la ecuación es un múltiplo de 3,900:

$$39,000\times d_2+3,900\times d_3 = 3,900\times(10\times d_2+d_3).$$

Entonces, para que exista (al menos) una pareja (d_2, d_3) es necesario que el lado derecho de la ecuación también sea un múltiplo de 3,900. ¡Pero 39,832 no es divisible por 3,900! Luego, se sigue tal(es) pareja(s) no existe(n).

Por lo tanto, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de cinco dígitos.

6 dígitos: cualquier número 4-mágico deber ser de la forma $4d_2d_3d_456$, con $d_2, d_3, d_4 \in \{0, \ldots, 9\}$ el segundo, tercer y cuarto dígito del número, respectivamente. La relación ($\star$) se traduce en

$$400,056 + 10,000 \times d_2 + 1,000 \times d_3 + 100 \times d_4$$
$$=$$
$$400,000 \times d_2 + 40,000 \times d_3 + 4,000 \times d_4 + 2,256$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$390,000 \times d_2 + 39,000 \times d_3 + 3,900 \times d_4 = 397,800$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$100 \times d_2 + 10 \times d_3 + d_4 = 102$$

Notemos que la única solución a esta última ecuación es $d_2 = 1$, $d_3 = 0$ y $d_4 = 2$. Por lo tanto, el único número 4-mágico de seis cifras es 410,256.

Respuesta final: Solo hay un único número 4-mágico de seis dígitos o menos: 410,256. ■

Segunda solución.(Ecuación Diofántica) Por definición, sabemos que es necesario que un número 4-mágico inicie (primer dígito) y sea divisible por 4. Entonces, tomando en cuenta lo anterior, podemos resolver este problema por casos. Primero, de la solución anterior tenemos que no existen números 4-mágicos de una y dos cifras.

3 dígitos: Cualquier número 4-mágico se debe escribir como $x = 4d_2d_3$, siendo $d_2, d_3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ el segundo y tercer dígito de x, respectivamente. Si $y = d_2d_34$ es el número que se obtiene al recorrer el 4 a la posición de las unidades, por definición se debe cumplir que

$$\frac{1}{4} \cdot x = y \quad \Longleftrightarrow \quad 4d_2d_3 = 4 \cdot (d_2d_34) \tag{5}$$

Ahora, recordemos que todo entero positivo se puede expresar en términos de sumas de potencias de 10 (notación decimal). En particular, tenemos que

$$4d_2d_3 = 400 + 10 \cdot d_2 + d_3 \quad \text{y} \quad d_2d_34 = 100 \cdot d_2 + 10 \cdot d_3 + 4.$$

Luego, utilizando estas descomposiciones, la segunda igualdad en (5) se traduce en una ecuación para d_2 y d_3:

$$\begin{aligned} 4d_2d_3 = 4 \cdot (d_2d_34) \quad &\Longleftrightarrow \quad 390 \cdot d_2 + 39 \cdot d_3 = 384 \\ &\Longleftrightarrow \quad 130 \cdot d_2 + 13 \cdot d_3 = 128. \end{aligned} \tag{6}$$

Así, todo se reduce a verificar si existen parejas (d_2, d_3) de números enteros entre 0 y 9 que satisfacen esta última ecuación.

Notemos que el lado izquierdo de la ecuación (6) es un múltiplo de 13:

$$130 \cdot d_2 + 13 \cdot d_3 = 13 \cdot (10 \cdot d_2 + d_3).$$

Entonces, para que exista (al menos) una pareja (d_2, d_3) es necesario que el lado derecho de la ecuación (6) también sea un múltiplo de 13. ¡Pero 128 no es divisible por 13! Luego, se sigue tal(es) pareja(s) no existe(n).

Por lo tanto, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de tres dígitos.

4 dígitos: Cualquier número 4-mágico se debe escribir como $4d_2d_3d_4$, siendo $d_2, d_3, d_4 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ el segundo, tercer y cuarto dígito del número, respectivamente. Entonces, razonando de manera análoga que en el caso de 3 dígitos, todo se reduce a verificar si existen ternas (d_2, d_3, d_4) de números enteros entre 0 y 9 que satisfacen la siguiente ecuación

$$3,900 \cdot d_2 + 390 \cdot d_3 + 39 \cdot d_4 = 3,984 \quad \Longleftrightarrow \quad 1,300 \cdot d_2 + 130 \cdot d_3 + 13 \cdot d_4 = 1,328.$$

Notemos que el lado izquierdo de esta última ecuación es un múltiplo de 13:

$$1,300 \cdot d_2 + 130 \cdot d_3 + 13 \cdot d_4 = 13 \cdot (100 \cdot d_2 + 10 \cdot d_3 + d_4).$$

Entonces, para que exista (al menos) una terna (d_2, d_3, d_4) es necesario que el lado derecho de tal ecuación también sea un múltiplo de 13. Pero 1,328 no es divisible por 13. Luego, se sigue tal(es) terna(s) no existe(n).

Por lo tanto, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de cuatro dígitos.

5 dígitos: Cualquier número 4-mágico se debe escribir como $4d_2d_3d_4d_5$, siendo $d_2, d_3, d_4, d_5 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ el segundo, tercer, cuarto y quinto dígito del número, respectivamente. Entonces, razonando de manera análoga que en el caso de 3 dígitos, todo se reduce a verificar si existen cuaternas (d_2, d_3, d_4, d_5) de números enteros entre 0 y 9 que satisfacen la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & 39,000 \cdot d_2 + 3,900 \cdot d_3 + 390 \cdot d_4 + 39 \cdot d_5 = 39,984 \\ \iff & 13,000 \cdot d_2 + 1,300 \cdot d_3 + 130 \cdot d_4 + 13 \cdot d_5 = 13,328. \end{aligned}$$

Notemos que el lado izquierdo de esta última ecuación es un múltiplo de 13:

$$13,000 \cdot d_2 + 1,300 \cdot d_3 + 130 \cdot d_4 + 13 \cdot d_5 = 13 \cdot (1,000 \cdot d_2 + 100 \cdot d_3 + 10 \cdot d_4 + d_5).$$

Entonces, para que exista (al menos) una cuaterna (d_2, d_3, d_4, d_5) es necesario que el lado derecho de tal ecuación también sea un múltiplo de 13. Pero 13,328 no es divisible por 13. Luego, se sigue tal(es) cuaterna(s) no existe(n).

Por lo tanto, se concluye que *no hay* números 4-mágicos de cinco dígitos.

6 dígitos: Cualquier número 4-mágico se debe escribir como $4d_2d_3d_4d_5d_6$, siendo $d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ el segundo, tercer, cuarto, quinto y sexto dígito del número, respectivamente. Entonces, razonando de manera análoga que en el caso de 3 dígitos, todo se reduce a verificar si existen quinternas $(d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$ de números enteros entre 0 y 9 que satisfacen la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & 390,000d_2 + 39,000d_3 + 3,900d_4 + 390d_5 + 39d_6 = 399,984 \\ \iff & 10,000d_2 + 1,000d_3 + 100d_4 + 10d_5 + d_6 = 10,256 \end{aligned}$$

Notemos que los números $d_2 = 1, d_3 = 0, d_4 = 2, d_5 = 5$ y $d_6 = 6$ son claramente una solución de esta última ecuación. Aún más, dado que la descomposición en potencias de 10 (notación decimal) de un número es única, se sigue que tal quinterna es la única solución de la ecuación.

Por lo tanto, se concluye que 410,256 es el *único* número 4-mágico de 6 dígitos.

Respuesta final: Solo hay un único número 4-mágico de 6 dígitos o menos: 410,256.
■

Problema 5 (4 puntos)**.** *Considere la función* $f(x) = x^2 + 12x + 30$*. Determine todos los números reales* x *tales que* $f(f(f(f(f(x))))) = 0$*.*

Primera solución. Nótese que, si completamos el cuadrado perfecto, se tiene que

$$x^2 + 12x + 30 = (x^2 + 12x + 36) - 6 = (x + 6)^2 - 6,$$

es decir, es $f(x) = (x + 6)^2 - 6$, por lo que $f(x) + 6 = (x + 6)^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (f(x) + 6)^2 - 6 = (x + 6)^4 - 6, \\ f(f(f(x))) &= (f(f(x)) + 6)^2 - 6 = ((x + 6)^4)^2 - 6 = (x + 6)^8 - 6, \\ f(f(f(f(x)))) &= (f(f(f(x))) + 6)^2 - 6 = ((x + 6)^8)^2 - 6 = (x + 6)^{16} - 6, \\ f(f(f(f(f(x))))) &= (f(f(f(f(x)))) + 6)^2 - 6 = ((x + 6)^{16})^2 - 6 = (x + 6)^{32} - 6. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación $f(f(f(f(f(x))))) = 0$ tiene dos soluciones reales: $x = \pm 6^{1/32} - 6$. ■

Segunda solución. Como en la primera solución, se tiene que la función puede reescribirse como $f(x) = (x + 6)^2 - 6$. Empecemos determinando los números reales tales que $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad (x + 6)^2 - 6 = 0 \quad \longrightarrow \quad (x + 6)^2 = 6$$

De ahí se tienen dos posibilidades, $x + 6 = \sqrt{6}$ o $x + 6 = -\sqrt{6}$, es decir, es

$$\boldsymbol{x = -6 + \sqrt{6}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{x = -6 - \sqrt{6}}.$$

Recuérdese que estos dos números son los que cumplen que $f(x) = 0$.

Ahora, buscaremos los números reales tales que $f(f(x)) = 0$. Por lo anterior, los posibles valores para $f(x)$ son

$$f(x) = -6 + \sqrt{6} \qquad \text{o} \qquad f(x) = -6 - \sqrt{6}.$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} (x + 6)^2 - 6 = -6 + \sqrt{6} &\qquad \text{o} \qquad (x + 6)^2 - 6 = -6 - \sqrt{6}, \\ (x + 6)^2 = \sqrt{6} &\qquad \text{o} \qquad (x + 6)^2 = -\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Observemos que la ecuación $(x + 6)^2 = -\sqrt{6}$ no tiene solución real, ya que el lado derecho es negativo, mientras que el izquierdo es un cuadrado y por tanto no puede ser negativo. Por tanto, se tiene que $(x+6)^2 = \sqrt{6}$, lo cual da las posibilidades $x+6 = \sqrt[4]{6}$ y $x+6 = -\sqrt[4]{6}$ que, a su vez, implican

$$\boldsymbol{x = -6 + \sqrt[4]{6}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{x = -6 - \sqrt[4]{6}}.$$

Recuérdese que estos dos números son los que cumplen que $f(f(x)) = 0$.

De manera similar, busquemos ahora los números reales que cumplen que $f(f(f(x))) = 0$. De lo anterior, debe tenerse que

$$f(x) = -6 + \sqrt[4]{6} \qquad \text{o} \qquad f(x) = -6 - \sqrt[4]{6}.$$

Procediendo como antes, se llega a que $(x+6)^2 = \sqrt[4]{6}$ o $(x+6)^2 = -\sqrt[4]{6}$. De éstas, la segunda ecuación no tiene solución real, ya que el lado izquierdo de ésta no puede ser negativo. La primera lleva a las soluciones

$$\boldsymbol{x = -6 + \sqrt[8]{6}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{x = -6 - \sqrt[8]{6}}$$

Si ahora buscamos los números reales tales que $f(f(f(f(x)))) = 0$, entonces debe ser $f(x) = -6 + \sqrt[8]{6}$ o $f(x) = -6 - \sqrt[8]{6}$. La segunda ecuación no tiene solución real, mientras que la primera tiene dos:

$$\boldsymbol{x = -6 + \sqrt[16]{6}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{x = -6 - \sqrt[16]{6}}$$

Finalmente, para los números reales tales que $f(f(f(f(f(x))))) = 0$ se tiene que $f(x) = -6 + \sqrt[16]{6}$ o $f(x) = -6 - \sqrt[16]{6}$. La segunda ecuación no tiene solución real, pero la primera nos lleva a las soluciones

$$\boldsymbol{x = -6 + \sqrt[32]{6}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{x = -6 - \sqrt[32]{6}},$$

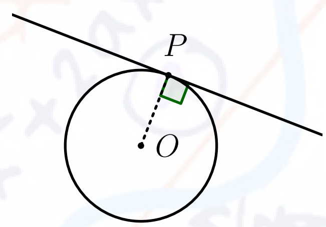
que son las que pide el problema. ■

Problema 6 (4 puntos)**.** *Considere un triángulo $\triangle ABC$ de área S y sean a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente. Una circunferencia de centro O y radio r es tangente a los lados CA y AB. Exprese la distancia x del punto O al lado BC en términos de S, a, b, c y r en los siguientes casos:*

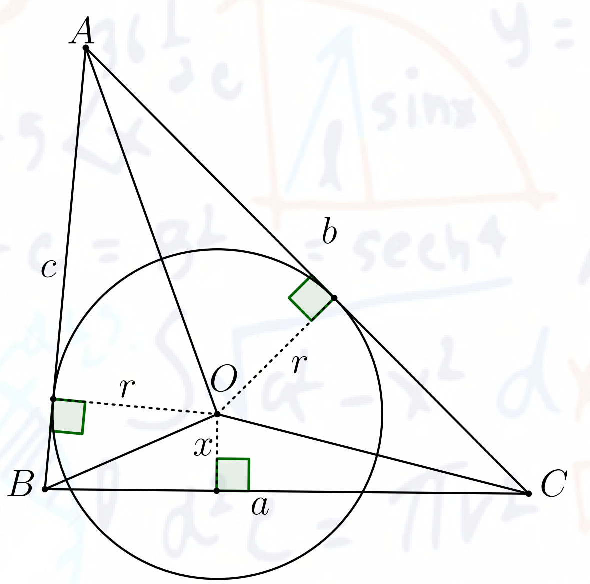
(a) El punto O está en el interior del triángulo $\triangle ABC$.

(b) El punto O está en el interior del ángulo $\angle BAC$, pero fuera del triángulo $\triangle ABC$.

Solución. Recordemos que, cuando una recta es tangente a una circunferencia, el radio de la circunferencia que va al punto de tangencia es perpendicular a la tangente, es decir, forman un ángulo recto.



En el contexto del problema, este hecho se traduce en lo siguiente: en el triángulo $\triangle OCA$, la altura desde O sobre la base CA es igual al radio r. Por ello, el área de $\triangle OCA$ es igual a $\frac{1}{2}br$. De la misma manera, se tiene que el área de $\triangle OAB$ es $\frac{1}{2}cr$. Asimismo, la altura desde O del triángulo $\triangle BOC$ es la distancia x del punto O al lado BC, por lo que el área del triángulo $\triangle BOC$ es $\frac{1}{2}ax$.



(a) En el caso en el que O está en el interior de $\triangle ABC$, se tiene que el área de $\triangle ABC$ es la suma de las áreas de $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ y $\triangle OBC$, es decir, es

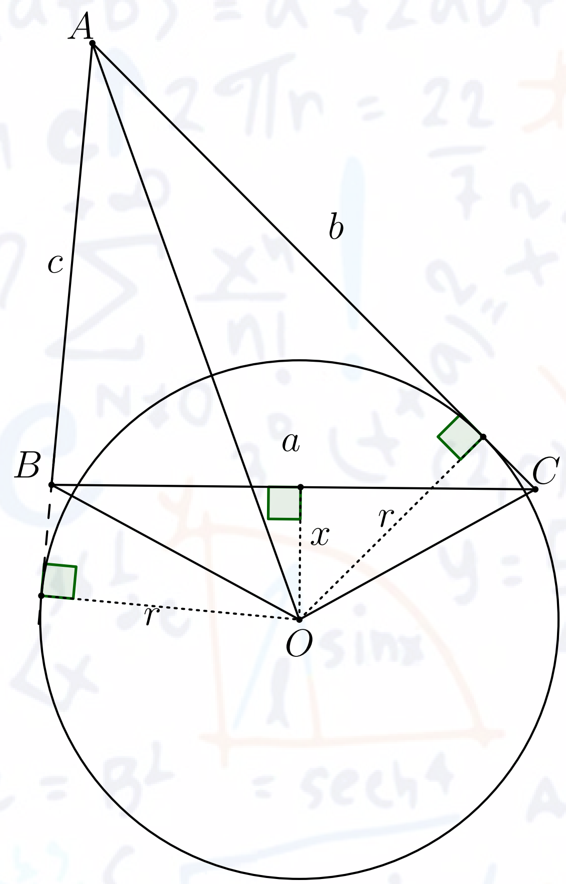
$$S = |\triangle ABC| = |\triangle OCA| + |\triangle OAB| + |\triangle OBC| = \tfrac{1}{2}(br + cr + ax).$$

Despejando x, se obtiene que $x = \frac{2S-(b+c)r}{a}$.

(b) Si O está en el interior del ángulo $\angle BAC$, pero fuera del triángulo $\triangle ABC$, se tiene la siguiente igualdad de áreas

$$|\triangle ABC| + |\triangle OBC| = |\triangle OCA| + |\triangle OAB|,$$

ya que ambos lados representan el área total del cuadrilátero $\square ABOC$.



Procediendo como en el inciso (a), se obtiene que $x = \frac{(b+c)r-2S}{a}$.

■

Problema 7 (4 puntos). *Determine todos los números naturales n tales que el producto de sus dígitos (en notación decimal) es igual a $n^2 - 25n + 158$.*

Solución. Sea $n = \overline{d_1 d_2 \ldots d_m}$ la expresión decimal de n. Buscamos todos los números naturales n tales que

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m = n^2 - 25n + 158.$$

Observemos que, como cada d_i es un dígito, es

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m \leq d_1 \cdot \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{m-1} = \overline{d_1 \underbrace{0 \ldots 0}_{m-1}} \leq n.$$

De modo que los únicos números naturales que pueden cumplir la condición del problema son aquéllos tales que

$$n^2 - 25n + 158 \leq n,$$

esto es, $n^2 - 26n + 158 \leq 0$. Un cálculo directo (por *fórmula general*) muestra que las raíces n_1 y n_2 de la ecuación $n^2 - 26n + 158$ satisfacen que $9 < n_1 < 10$ y $16 < n_2 < 17$. Esto implica que la desigualdad $n^2 - 26n + 158 \leq 0$ sólo se verifica para $n = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$. Para cada uno de estos valores de n, tenemos lo siguiente:

$n = \overline{d_1 d_2}$	$n^2 - 25n + 158$	$d_1 \cdot d_2$
10	8	0
11	4	1
12	2	2
13	2	3
14	4	4
15	8	5
16	14	6

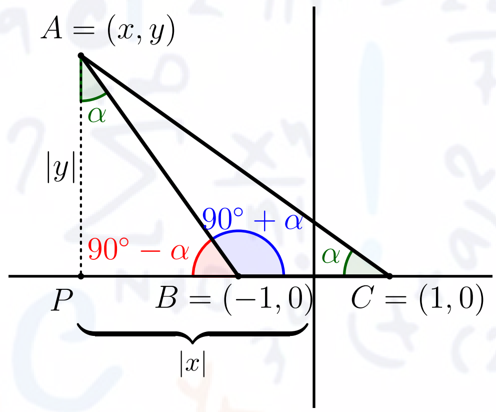
Concluímos entonces que los únicos números naturales n tales que el producto de sus dígitos es $n^2 - 25n + 158$ son $n = 12$ y $n = 14$. ■

Problema 8 (4 puntos). *Sean $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$ puntos en el plano. Considere el lugar geométrico $\mathcal{K}$ de los puntos $A = (x, y)$ tales que la diferencia de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$ es un ángulo recto.*

(a) *Obtenga una ecuación del lugar geométrico $\mathcal{K}$ (en términos de x y y).*

(b) *Pruebe que $\mathcal{K}$ es una cónica y calcule su excentricidad.*

Solución. Sean x y y las coordenadas de A y sea P el pie de la altura desde A. Llamémosle α al ángulo $\angle ACB$.



Puesto que $\angle ACB$ y $\angle ABC$ difieren en un ángulo recto, se sigue que $\angle ABC = 90° + \alpha$. Por otra parte, como los puntos P, B y C están en una mísma línea, se sigue que los ángulos $\angle ABP$ y $\angle ABC$ suman $180°$. En consecuencia, es $\angle ABP = 90° - \alpha$. Por último, observe que $\triangle APB$ es un triángulo rectángulo, por lo cual es $\angle PAB = \alpha$ para que sus ángulos internos sumen $180°$.

Ahora, notemos que los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle CPA$ son semejantes, ya que ambos tienen un ángulo recto en P y un ángulo α. Entonces, sus catetos son proporcionales, es decir, es

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PA}$$

(esta igualdad también se obtiene observando que $AP/PB = \cot\alpha$ en el triángulo rectángulo $\triangle ABP$, mientras que $CP/PA = \cot\alpha$, calculada en el triángulo rectángulo $\triangle CPA$).

Note que $AP = |y|$, $CP = |x| + 1$ y $BP = |x| - 1$. Sustituyendo en la igualdad anterior, llegamos a una posible ecuación que relaciona x con y:

$$\frac{|y|}{|x| - 1} = \frac{|x| + 1}{|y|}$$

Multiplicando cruzado, desarrollando y simplificando los cuadrados de los valores absolutos, obtenemos otra posible ecuación: $y^2 = x^2 - 1$. Ésta es la ecuación de una hipérbola horizontal con vértices en B y C. Su forma canónica es

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

de donde se sigue que $a = 1$ y $b = 1$. Luego, es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, por lo que su excentricidad es $e = c/a = \sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$. ■

Problema 9 (5 puntos)**.** *Sean α, β y γ ángulos agudos y positivos. Apoyándose en la gráfica de $y = \cos(x)$, pruebe que*

(a) $\dfrac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}{2} \leqslant \cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$,

(b) $\dfrac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{3} \leqslant \cos\left(\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$.

Observación: Vamos a presentar tres soluciones diferentes. Sólo la primera para el inciso (a) usa propiedades específicas de la función coseno; en cambio, el inciso (b), y las otras dos soluciones, valen también para cualquier otra función cuya gráfica abra hacia abajo.

Primera solución. Para el inciso (a), considérese las identidades para suma y resta de ángulos de la función coseno:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

Sumando ambas identidades y dividiendo entre 2, se obtiene que

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y),$$
$$\tfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2} = \cos(x)\cos(y).$$

Ahora, tomemos $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Entonces, es $x + y = \alpha$ y $x - y = \beta$, por lo que de la igualdad anterior se tiene que

$$\frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}{2} = \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\tfrac{\alpha-\beta}{2}).$$

Puesto que α y β son agudos y positivos, se tiene que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ también lo es, por lo que es $\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) > 0$. Además, es $\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \leq 1$, ya que el coseno está acotado superiormente por 1. Por lo tanto, es

$$\frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}{2} = \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\tfrac{\alpha-\beta}{2}) \leq \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2}),$$

como queríamos probar.

Para el inciso (b), primero utilizaremos el resultado del inciso (a) para demostrar una versión con cuatro ángulos. Es decir, si α, β, γ y δ son cuatro ángulos agudos y positivos, entonces del resultado del inciso (a) se tiene

$$\frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\cos(\gamma)+\cos(\delta)}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right).$$

Observemos que también que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ y $\frac{\gamma+\delta}{2}$ también son agudos y positivos. Por el resultado del inciso (a), se tiene que

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right).$$

Combinando las desigualdades anteriores, obtenemos

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta}{4} = \frac{\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}+\frac{\cos\gamma+\cos\delta}{2}}{2} \leqslant \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right).$$

Hemos demostrado la desigualdad $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta}{4} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right)$, la cual es válida para cualesquiera ángulos agudos y positivos α, β, γ y δ. Para recuperar la deisgualdad del inciso (b), es decir, con tres ángulos, apliquemos la desigualdad para cuatro ángulos tomando $\delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$. En este caso, se tiene que

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4} = \frac{3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$

por lo que la desigualdad para α, β, γ y $\delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ resulta en

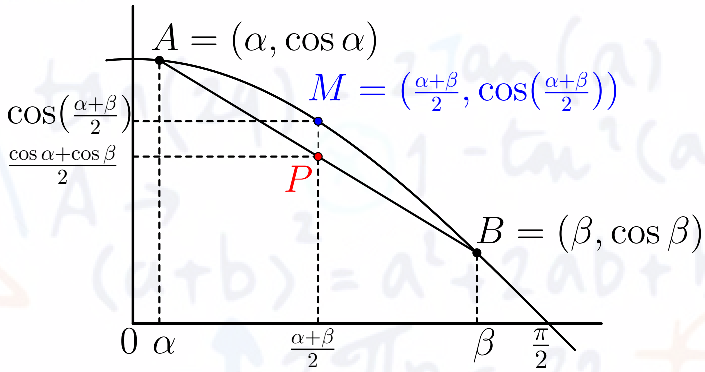
$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)}{4} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right).$$

Multiplicando a ambos lados por 4 y pasando restando, obtenemos

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &\leqslant 4\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)-\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),\\
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &\leqslant 3\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),\\
\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} &\leqslant \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. ■

Segunda solución. Para el inciso (a), consideremos los puntos $A = (\alpha, \cos\alpha)$, $B = (\beta, \cos\beta)$ y $M = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$ sobre la gráfica $y = \cos(x)$:

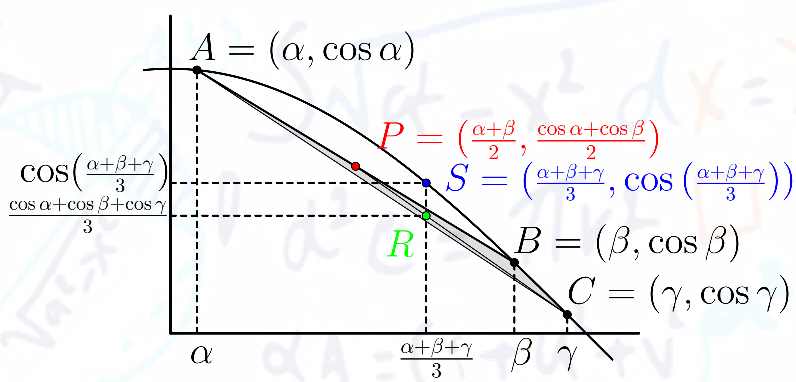


Considere también el punto medio P del segmento $\overline{AB}$. Sus coordenadas (x_P, y_P) son los promedios de las coordenadas de A y B, es decir, es

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \text{y} \qquad y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},$$

de manera que $P = (\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2})$. Puesto que α y β son positivos y agudos, éstos pertenecen al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, donde la gráfica $y = \cos(x)$ es cóncava (abre hacia abajo). Luego, el segmento $\overline{AB}$, y su punto medio P, quedan por debajo de la gráfica. Tomando en cuenta que P y M tienen la misma coordenada x, con M en la gráfica y P debajo de ésta, se sigue que la coordenada y de P es menor o igual que la coordenada y de M. En otras palabras, se tiene que $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2} \leqslant \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$, como queríamos probar.

Para el inciso (b), considere los puntos $A = (\alpha, \cos\alpha)$, $B = (\beta, \cos\beta)$, $C = (\gamma, \cos\gamma)$ y $S = (\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \cos(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}))$ sobre la gráfica $y = \cos(x)$:



Consideremos también como puntos auxiliares el punto medio P del segmento $\overline{AB}$, cuyas coordenadas son $P = (\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2})$, y el punto R que divide al segmento $\overline{CP}$

en razón $2:1$ (es decir, tal que CR es el doble de RP). Entonces, las coordenadas (x_R, y_R) del punto R se calculan en términos de las de C y P como

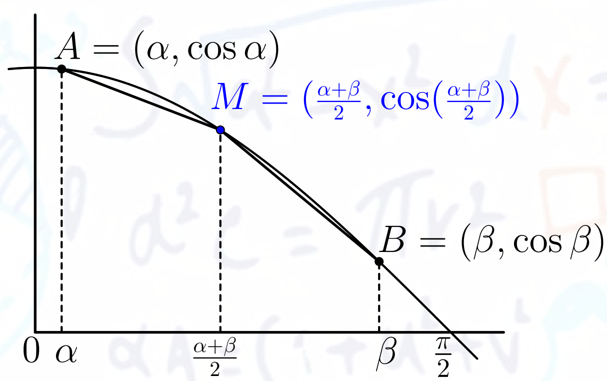
$$x_R = \frac{2x_P + x_C}{3} = \frac{2(\frac{\alpha+\beta}{2}) + \gamma}{3} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},$$
$$y_R = \frac{2y_P + y_C}{3} = \frac{2(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}) + \cos\gamma}{3} = \frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}.$$

Nuevamente, por la concavidad de $f(x) = \cos(x)$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$, el triángulo $\triangle ABC$ queda por debajo de la gráfica. En particular, el punto R queda debajo de la gráfica, ya que es interior a $\triangle ABC$. Por su parte, el punto $S = (\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \cos(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}))$ está sobre la gráfica. Puesto que R y S tienen la misma coordenada x, nuevamente se sigue que la coordenada y de R es menor o igual que la coordenada y de S, es decir, es $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \leqslant \cos(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})$. ■

Tercera solución. Para el inciso (a), si $\alpha = \beta$, entonces ambos lados son iguales y el resultado se tiene claramente. Podemos suponer que es $\alpha < \beta$, pues el caso contrario se prueba similarmente. Pasemos multiplicando el 2 y expresemos la desigualdad que queremos probar de la siguiente manera:

$$\cos\alpha + \cos\beta \leq 2\cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2})$$
$$\cos\beta - \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2}) \leq \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2}) - \cos\alpha$$

Ahora, consideremos los puntos $A = (\alpha, \cos\alpha)$, $B = (\beta, \cos\beta)$ y $M = (\frac{\alpha+\beta}{2}, \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}))$ sobre la gráfica $y = \cos(x)$:



Puesto que α y β son positivos y agudos, se tiene que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ también lo es, por lo que dichos ángulos pertenecen al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, en el cual la gráfica $y = \cos(x)$ es cóncava (abre hacia abajo). Luego, los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ quedan por debajo de la gráfica. Por ser $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$, lo anterior implica que la inclinación hcia abajo del segmento $\overline{MB}$ es mayor que la de $\overline{AM}$, pues de lo contrario dichos segmentos quedarían en alguna parte por encima de la gráfica. Esto se traduce en que la pendiente de AM es mayor que la de MB:

$$m_{AM} \geq m_{MB}$$

Por una parte, la pendiente de la recta AM es

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos\alpha}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Por otra parte, la pendiente de la recta MB es

$$m_{MB} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{\cos\beta - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\beta - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Luego, de la desigualdad $m_{AM} \geq m_{MB}$, se tiene que

$$\frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \geq \frac{\cos\beta - \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

por lo que, al ser $\beta > \alpha$, se sigue que

$$\cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2}) - \cos\alpha \geq \cos\beta - \cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2}),$$

lo cual, como vimos arriba, equivale a la desigualdad del inciso (a).

Para el inciso (b), procédase como en la primera solución. ■

Problema 10 (5 puntos). *Sean a, b y c números reales y considere tres ángulos α, β y γ tales que*

$$a = \tan\alpha, \qquad b = \tan\beta \quad y \quad c = \tan\gamma.$$

(a) *Suponga que α, β y γ son ángulos internos de un triángulo. Pruebe que $abc = a + b + c$.*

(b) *Suponga que $abc = a + b + c$. Demuestre que $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.*

(c) *Suponga que a, b y c son positivos y que $abc = a + b + c$. Demuestre que*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Primera solución.

(a) Si α, β y γ son ángulos internos de un triángulo, entonces es $\alpha+\beta = 180°-\gamma$. Por las fórmulas para la tangente de suma y resta de ángulos, tenemos que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{a+b}{1-ab}$$

y que

$$\tan(180° - \gamma) = -\tan\gamma = -c.$$

Entonces, es $\frac{a+b}{1-ab} = -c$, por lo que $a + b = -c + abc$ y, así, se obtiene que $a + b + c = abc$.

(b) Observe nuevamente que podemos reescribir $a + b + c = abc$ como $\frac{a+b}{1-ab} = -c$, lo cual se traduce en que $\tan(\alpha + \beta) = \tan(-\gamma)$. Veamos que esto implica que $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$. Si dos ángulos tienen la misma tangente, quiere decir que son iguales o su diferencia es múltiplo entero de $\pi = 180°$. Esto se debe a que $f(x) = \tan(x)$ es una función de periodo π y biyectiva en cada periodo. Por lo tanto, se tiene que el ángulo $(\alpha+\beta)-(-\gamma) = (\alpha+\beta+\gamma)$ es un múltiplo entero de $\pi = 180°$. Esto implica que $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

(c) Tomemos $\alpha = \arctan(a)$, $\beta = \arctan(b)$ y $\gamma = \arctan(c)$. Entonces, es

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \cos\alpha.$$

De manera similar se tiene que $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \cos\beta$ y que $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\gamma$. Luego, el probema se convierte en demostrar que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 3/2$. Puesto que a, b y c son positivos, se sigue que α, β y γ son agudos y positivos. Más aún, por el inciso anterior, la condición $abc = a + b + c$ nos dice que $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 0$. Esto implica que $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ ya que, al ser agudos y positivos, la suma está en el intervalo $(0°, 270°)$, pero en dicho intervalo la tangente sólo se anula en $180°$. Finalmente, aplicando el resultado del iniciso (b) del problema 9, se sigue que

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 3\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\cos(60°) = 3/2.$$

■

Segunda solución. Vamos a probar los incisos (a) y (b) usando la siguiente fórmula y, al final, veremos una prueba de ella:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{a+b+c-abc}{1-(ab+bc+ca)}$$

Recordemos ahora que una fracción es cero cuando su numerador es igual a cero. Entonces, de esta fórmula se tiene que $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 0$ si y sólo si $abc = a+b+c$. En particular, esto ocurre cuando $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, es decir, si α, β y γ son los ángulos internos de un triángulo. Esto prueba los incisos (a) y (b). Para el inciso (c), procédase como en la primera solución.

A continuación, veamos una prueba de la fórmula de arriba: Recordemos que la tangente de la suma de dos ángulos puede calcularse como

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Aplicando esto a los ángulos $(\alpha+\beta)$ y γ se obtiene

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{\tan(\alpha+\beta)+c}{1-\tan(\alpha+\beta)c}.$$

Sustituyendo con la identidad anterior, obtenemos que

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\frac{a+b}{1-ab}+c}{1-\frac{a+b}{1-ab}c}.$$

Multiplicando arriba y abajo por $(1-ab)$ para obtener una sola fracción, llegamos a la fórmula deseada:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{(\frac{a+b}{1-ab}+c)(1-ab)}{(1-\frac{a+b}{1-ab}c)(1-ab)} = \frac{a+b+c(1-ab)}{(1-ab)-(a+b)c} = \frac{a+b+c-abc}{1-(ab+bc+ca)}$$

■