



GOBIERNO
DE SONORA

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN
Y CULTURA



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

COMPETENCIA DE MATEMÁTICAS POR EQUIPOS 2023

NIVEL MEDIO SUPERIOR

Primer Listado de Problemas

Instrucciones:

- Se debe de enviar las respuestas de los problemas con su respectivos procedimientos.
- Se aceptan procedimientos y respuestas parciales de los problemas.
- La fecha límite de envío es el 19 de septiembre de 2023.
- Para mayor información sobre el envío de respuestas y procedimientos, ver [Manual](#).

Problema 1 (3 puntos). *Julián tiene tres mangueras de las cuales fluye agua de cada una a una misma tasa constante. Julián comienza a llenar una alberca a las 7:00 hrs con las tres mangueras y estima que la alberca quedará llena a las 19:00 hrs del mismo día. A las 12:00 hrs, inesperadamente una de las mangueras deja de funcionar y se detiene su flujo de agua. Suponiendo que las otras dos mangueras siguen funcionando correctamente, ¿a qué hora terminará de llenarse ahora la alberca?*

Problema 2 (3 puntos). *Un lechero tiene dos recipientes llenos de leche de 2.5 litros cada uno. Dos clientes desean comprar 0.5 litros de leche individualmente. Las capacidades de los recipientes vacíos de los clientes son de 0.75 y 1.25 litros, respectivamente. Explique el procedimiento que debe seguir el lechero para llevar acabo la venta usando únicamente los recipientes vacíos de los dos clientes y los recipientes llenos de leche que tiene él. Suponga que el lechero no puede regalar ni tirar la leche y que ninguno de los recipientes está graduado.*

Problema 3 (4 puntos). *Sean a , b y c números cualesquiera, tales que $a \neq b$ y*

$$a(b^2 + c^2) = b(a^2 + c^2) = 1.$$

Determine el valor de $c^2(a + b)$.

Problema 4 (5 puntos). *Considere las sucesiones aritméticas*

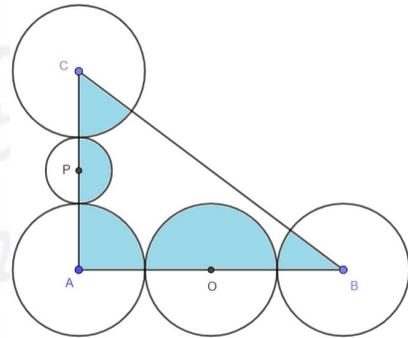
$$1, 4, 7, 10, \dots$$

y

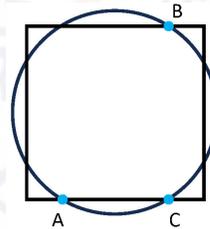
$$2, 12, 22, 32, \dots$$

¿Cuál es la forma del n -ésimo término de cada una de las sucesiones? ¿Cuál es el entero más pequeño mayor a 2023 que aparece en ambas sucesiones y en qué término de cada una de las sucesiones aparece?

Problema 5 (4 puntos). En la figura ABC es un triángulo rectángulo con lados $AB = 4$, $AC = 3$ y con ángulo recto en A . Además se tiene que las circunferencias con centros en los vértices del triángulo ABC tienen el mismo radio y la circunferencia con centro en O tiene el cuádruple de área de la circunferencia con centro en P . Determine el área de la región sombreada.



Problema 6 (4 puntos). El círculo y el cuadrado de la figura tienen la misma área y el mismo centro. Si el círculo tiene radio 1, ¿Cuál es la longitud de los segmentos AC , BC y AB ? ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?



Problema 7 (5 puntos). Considere la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 10$. A partir de un punto fijo $P = (a, b)$ sobre la circunferencia considere todas las posibles cuerdas.

(i) Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas.

(ii) A partir de la ecuación del inciso (i), demuestre que dicho lugar geométrico es una circunferencia y encuentre su centro y radio.

Problema 8 (4 puntos). Muestre que en cualquier triángulo ABC con lados $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$, se cumple

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

Problema 9 (3 puntos). Si la ecuación $x^2 + bx + a = 0$ tiene únicamente una raíz, ¿qué valores pueden tomar a y b ?

Problema 10 (5 puntos). ¿Cuántos polinomios $p(x)$ cumplen con $p(5) = 5!$ y $xp(x-1) = (x-5)p(x)$? De un ejemplo de dicho polinomio.

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx

Problemas técnicos con el sistema: sistema.competencia@mat.uson.mx