GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Competencia de Matemáticas por Equipos 2023

Nivel Medio Superior

Primer Listado de Problemas

Problema 1 (3 puntos)**.** *Julián tiene tres mangueras de las cuales fluye agua de cada una a una misma tasa constante. Julián comienza a llenar una alberca a las 7:00 hrs con las tres mangueras y estima que la alberca quedará llena a las 19:00 hrs del mismo día. A las 12:00 hrs, inesperadamente una de las mangueras deja de funcionar y se detiene su flujo de agua. Suponiendo que las otras dos mangueras siguen funcionando correctamente, ¿a qué hora terminará de llenarse ahora la alberca?*

Primera Solución:
Si V es el volumen en litros y x es la tasa de litros por hora. Tenemos que a una tasa de $3x$ se llena la alberca en 12 horas, esto es

$$V = 3xt \text{ de donde } 3x = \frac{V}{t} = \frac{V}{12}$$

equivalente a

$$x = \frac{V}{36} \tag{1}$$

Después de 5 horas (a las 12:00 hrs) se ha llenado un volumen de $\frac{5}{12}V$ y faltarian $\frac{7}{12}V$. Reiniciando a las 12:00 hrs a una tasa de $2x$ y volumen por llenar de $\frac{7}{12}V$ se tiene que

$$2x = \frac{(7/12)V}{t} \text{ equivalente a } t = \frac{(7/12)V}{2x}.$$

Ahora, por (1)

$$t = \frac{7V}{24x} = \frac{7V}{24(V/36)} = \frac{21}{2}.$$

Por lo tanto después de las 12:00 hrs faltarían 10.5 hrs para que la alberca se llene, esto es, la alberca se terminará de llenar a las 22:30 hrs (10:30 PM). ■

Segunda Solución:
Observe que 3 mangueras llenan la alberca en 12 horas, lo cual implica que una sola manguera llena la alberca de agua en 36 horas.
Por otra parte, note que las primeras 5 horas son equivalentes a 15 horas de trabajo de las

mangueras. De manera que restan $36 - 15 = 21$ horas de trabajo pero ahora se repartirá entre dos mangueras. Por lo tanto, este trabajo se realiza por dos mangueras en $\frac{21}{2}$ horas. Por lo tanto después de las 12:00 hrs faltarían 10.5 hrs para que la alberca se llene, esto es, la alberca se terminará de llenar a las 22:30 hrs (10:30 PM). ■

Problema 2 (3 puntos). *Un lechero tiene dos recipientes llenos de leche de 2.5 litros cada uno. Dos clientes desean comprar 0.5 litros de leche individualmente. Las capacidades de los recipientes vacíos de los clientes son de 0.75 y 1.25 litros, respectivamente. Explique el procedimiento que debe seguir el lechero para llevar acabo la venta usando únicamente los recipientes vacíos de los dos clientes y los recipientes llenos de leche que tiene él.*
Suponga que el lechero no puede regalar ni tirar la leche y que ninguno de los recipientes está graduado.

Solución:
Para llevar un registro de la cantidad de leche que tiene cada uno de los 4 recipientes en cada movimiento del lechero, podemos ir anotando en cada entrada del siguiente arreglo númerico (recipiente 1, recipiente 2, recipiente 3, recipiente 4) la cantidad en litros que contiene cada recipiente. De manera que, inicialmente tenemos (2.5, 2.5, 0, 0). El lechero debe seguir los siguientes 9 pasos.
Paso uno: llenar el recipiente 3 usando la leche del recipiente 1, entonces se registra

$$(1.75, 2.5, 0.75, 0).$$

Paso dos: con la leche del recipiente 2, llenar el recipiente 4, entonces se registra

$$(1.75, 1.25, 0.75, 1.25).$$

Paso tres: vaciar toda la leche del recipiente 3 al recipiente 2, entonces se registra,

$$(1.75, 2, 0, 1.25).$$

Paso cuatro: con la leche del recipiente 4, llenamos el recipiente 3, entonces se registra,

$$(1.75, 2, 0.75, 0.5).$$

Paso cinco: la leche del recipiente 4 vaciarla en el recipiente 1, entonces se registra,

$$(2.25, 2, 0.75, 0).$$

Paso seis: pasar la leche del recipiente 3 al recipiente 4, entonces se registra,

$$(2.25, 2, 0, 0.75).$$

Paso siete: con la leche del recipiente 2 llenar el recipiente 4, entonces se registra,

$$(2.25, 1.5, 0, 1.25).$$

Paso ocho: con la leche del recipiente 4 llenar el recipiente 3, entonces se registra,

$$(2.25, 1.5, 0.75, 0.5).$$

Finalmente, paso nueve: con la leche del recipiente 3 llenar el recipiente 1, entonces se registra,

$$(2.5, 1.5, 0.5, 0.5).$$

Por lo tanto, el lechero si puede llevar acabo la venta. ■

Problema 3 (4 puntos). *Sean a, b y c números cualesquiera, tales que $a \neq b$ y*

$$a(b^2 + c^2) = b(a^2 + c^2) = 1.$$

Determine el valor de $c^2(a + b)$.

Solución:
De la primera igualdad

$$\begin{aligned} 0 &= a(b^2 + c^2) - b(a^2 + c^2) \\ &= ab^2 + ac^2 - ba^2 - bc^2 \\ &= ab(b - a) - c^2(b - a) \\ &= (ab - c^2)(b - a). \end{aligned}$$

Como $a \neq b$, se sigue que $c^2 = ab$. Insertando esto en la igualdad $a(b^2 + c^2) = 1$ obtenemos,

$$\begin{aligned} a(b^2 + ab) &= 1, \\ ab(b + a) &= 1, \\ c^2(a + b) &= 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Problema 4 (5 puntos)**.** *Considere las sucesiones aritméticas*

$$1, 4, 7, 10, \ldots$$

y

$$2, 12, 22, 32, \ldots.$$

¿Cuál es la forma del $n-$ésimo término de cada una de las sucesiones? ¿Cuál es el entero más pequeño mayor a 2023 que aparece en ambas sucesiones y en qué término de cada una de las sucesiones aparece?

Solución:

Sea a_n el $n-$ésimo término de la primera sucesión, este está determinado por la forma

$$a_n = 3n - 2, \ n = 1, 2, \ldots$$

y sea b_n el $n-$ésimo término de la segunda sucesión, este está determinado por la forma

$$b_n = 10n - 8, \ n = 1, 2, \ldots.$$

No es difícil observar que por la forma de los términos de a_n cercanos a 2023 son:

$$2022, 2025, 2028, 2032, 2035, 2036, 2037, 2038, \ldots$$

y de b_n son:

$$2022, 2032, 2042, \ldots$$

De manera que el entero mas pequeño mayor a 2023 es 2032.

Para determinar el término en el que cada sucesión alcanza el 2032 podemos despejar n y m de cada uno de los términos de a_n y b_m ya que evidentemente no se trata de los mismos términos.

De la sucesión a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= 3n - 2 \\ 2032 &= 3n - 2 \\ 2034 &= 3n \\ n &= 678. \end{aligned}$$

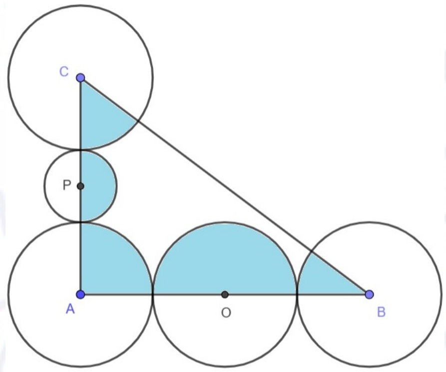
Por lo tanto en el término 678 de la sucesión a_n se alcanza el 2032.

De la segunda sucesión b_m:

$$\begin{aligned} b_m &= 10m - 8 \\ 2032 &= 10m - 8 \\ 2040 &= 10m \\ m &= 204. \end{aligned}$$

Por lo tanto en el término 204 de la sucesión b_m se alcanza el 2032. ■

Problema 5 (4 puntos). *En la figura ABC es un triángulo rectángulo con lados $AB = 4$, $AC = 3$ y con ángulo recto en A. Además se tiene que las circunferencias con centros en los vértices del triángulo ABC tienen el mismo radio y la circunferencia con centro en O tiene el cuádruple de área de la circunferencia con centro en P. Determine el área de la región sombreada.*



Solución:

Sean x y y los radios de los círculos con centro en O y P respectivamente, y sea A_O y A_P el área de los círculos con centro en O y P. De la relación entre sus áreas tenemos

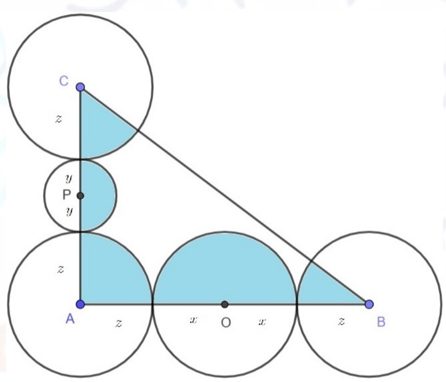
$$4 = \frac{A_O}{A_P} = \frac{\pi x^2}{\pi y^2} = \frac{x^2}{y^2},$$

de manera que calculando raíz cuadrada en ambos términos de la igualdad

$$\frac{x}{y} = 2$$

equivalente a

$$x = 2y. \tag{2}$$



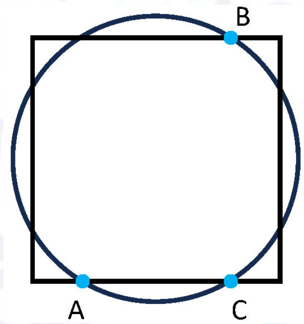
Ahora sea z el radio de los círculos con centro en los vértices A, B y C. Por las medidas de los lados AB y AC tenemos las siguientes ecuaciones

$$2z + 2y = 3$$
$$2z + 2x = 4.$$

Resolviendo las ecuaciones previas junto con la ecuación (2) se llega a que $x = 1$, $y = 1/2$ y $z = 1$.
Finalmente, observe que el área de la parte sombreada es:

$$\frac{\pi z^2}{2} + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}. \blacksquare$$

Problema 6 (4 puntos)**.** *El círculo y el cuadrado de la figura tienen la misma área y el mismo centro. Si el círculo tiene radio 1, ¿Cuál es la longitud de los segmentos AC, BC y AB? ¿Cuál es el área del triángulo ABC?*



Solución:

Paso 1. Al tener la misma área el círculo y el cuadrado, tenemos que dicha área es π. Por tanto, el cuadrado tiene longitud $\sqrt{\pi}$.

Paso 2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el centro de estas figuras se encuentra en el punto $(0, 0)$. La ecuación del círculo es por tanto $x^2 + y^2 = 1$. De aquí se sigue también, sin pérdida de generalidad que el cuadrado está dado por segmentos de recta, verticales y horizontales dados por $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Paso 3 Con esta información, es posible encontrar las coordenadas de los puntos A, B y C. Para las coordenadas de B, sustituimos $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en la ecuación de la circunferencia, lo que nos da

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1,$$

o bien

$$x^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Claramente $x = \sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}$. De aquí tenemos que las coordenadas de B son $\left(\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Paso 4 Claramente, las coordenadas de A y C son $\left(-\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, respectivamente.

Paso 5 Observe que tenemos un triángulo rectángulo. El área del triángulo es $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$. Es decir, es

$$\text{área} = \frac{\left(2\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)}{2} = \sqrt{\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Paso 6 De aquí las longitudes de los segmentos son

$$AC = 2\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}}$$

$$BC = \sqrt{\pi}$$

y

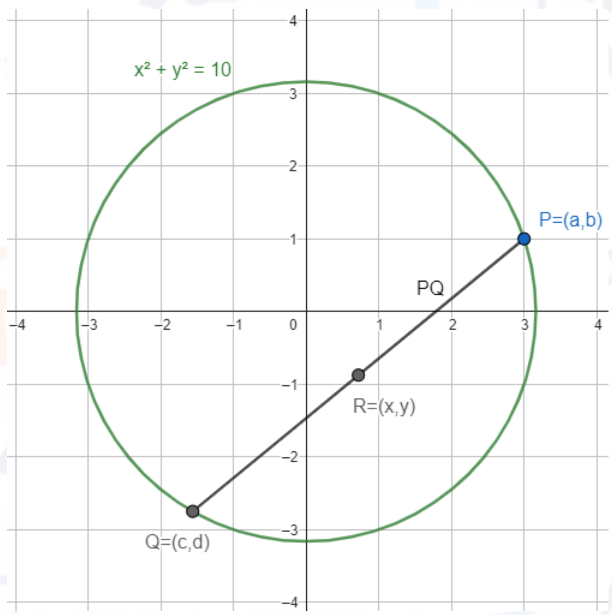
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4 - \pi + \pi} = 2. \blacksquare$$

Problema 7 (5 puntos)**.** *Considere la circunferencia cuya ecuación es* $x^2+y^2=10$*. A partir de un punto fijo* $P=(a,b)$ *sobre la circunferencia considere todas las posibles cuerdas.*

(i) *Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas.*

(ii) *A partir de la ecuación del inciso* (i)*, demuestre que dicho lugar geométrico es una circunferencia y encuentre su centro y radio.*

Solución:
Tracemos un cuerda arbitraria desde $P=(a,b)$ cuyo extremo opuesto sea $Q=(c,d)$. Sobre la cuerda PQ tracemos el punto medio R con coordenadas (x,y) como se muestra en la figura de abajo.



El punto medio de la cuerda PQ tiene coordenadas

$$(x,y)=\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right).$$

Igualando componentes, encontramos que

$$c=2x-a, \qquad d=2y-b.$$

Recordando que $Q=(c,d)$ es un punto sobre la circunferencia, obtenemos

$$\begin{aligned}(2x-a)^2+(2y-b)^2&=10\\ 4x^2-4ax+a^2+4y^2-4by+b^2&=10\\ 4x^2-4ax+4y^2-4by&=0\\ x^2-ax+y^2-by&=0\end{aligned}$$

Completando trinomios cuadrados perfectos

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

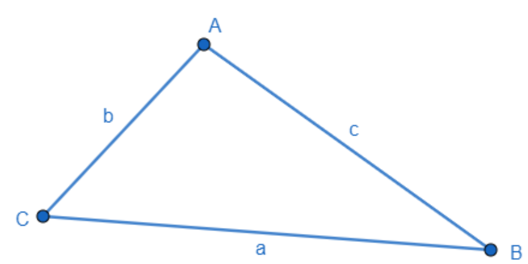
Esta es la ecuación de la circunferencia con centro en $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$. ■

Problema 8 (4 puntos)**.** *Muestre que en cualquier triángulo ABC con lados $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$, se cumple*

$$\textit{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

donde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

Solución:



La identidad de ángulo mitad para la función seno nos dice que

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(A)}{2}}$$

Por otro lado, la ley de los cosenos aplicada al ángulo A se escribe como

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

Despejando el $\cos(A)$ tenemos

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Insertando esto en la identidad de ángulo mitad conseguimos

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que

$$\begin{aligned}
s-b &= \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}, \\
s-c &= \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Problema 9 (3 puntos)**.** *Si la ecuación $x^2 + bx + a = 0$ tiene únicamente una raíz, ¿qué valores pueden tomar a y b?*

Solución:
Vamos a usar una nueva letra auxiliar c que nos permitirá relacionar los números a y b asumiendo que la ecuación $x^2 + bx + a = 0$ tiene únicamente una raíz. Es decir, el valor c es un número el cuál es la única raíz de la ecuación antes mencionada, entonces,

$$(x - c)^2 = x^2 - 2cx + c^2 = x^2 + bx + a.$$

Igualando término a término, vemos que $b = -2c$, y $a = c^2$. Si hacemos un análisis del comportamiento en los valores posibles de a y b obtenemos que:

1) De la ecuación $b = -2c$, notamos que el valor b puede ser cero, negativo o positivo, una vez elegido b debemos tomar el $a = c^2 = b^2/4$.

2) Si en lugar de escoger b, escogemos primero el número a, este debe ser mayor o igual a cero pues $a = c^2$, así el valor de b debe ser uno de los dos siguientes valores $\pm\sqrt{a}$. ■

Problema 10 (5 puntos). *¿Cuántos polinomios $p(x)$ cumplen con $p(5) = 5!$ y $xp(x-1) = (x-5)p(x)$? De un ejemplo de dicho polinomio.*

Solución:
Paso 1. Evalúe primeramente $xp(x-1) = (x-5)p(x)$ en $x = 5$.

$$5p(5-1) = (5-5)p(5) = 0.$$

De aquí se sigue que $p(4) = 0$, es decir, $x = 4$ es raíz de los polinomios buscados.
Paso 2. Repetimos el argumento con $x = 4$.

$$4p(4-1) = (4-5)p(4).$$

Cómo $x = 4$ es raíz de nuestros polinomios, se sigue que $p(3) = 0$, es decir, $x = 3$ es raíz de nuestros polinomios.
Paso 3. Siguiendo este procedimiemto, observamos que $x = 4$, $x = 3$,$x = 2$, $x = 1$, $x = 0$ son raíces de nuestros polinomios.
Paso 4. Evaluamos una vez más en $x = 0$.

$$0p(-1) = (0-5)p(0).$$

En este caso, no es posible asegurar que $x = -1$ es una raíz de nuestros polinomios.
Paso 5. Por tanto, nuestros polinomios tienen la forma

$$p(x) = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)xq(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio.
Paso 6. Evaluemos $p(x)$ en $x = 5$,

$$p(5) = (5-4)(5-3)(5-2)(5-1)5q(5)$$

Por tanto,

$$p(5) = 5!q(5)$$

Paso 7. Como se pide que $p(5) = 5!$, no queda otra opción que $q(5) = 1$.
Paso 8. Ahora, usando la igualdad $xp(x-1) = (x-5)p(x)$, con nuestro polinomio, obtenemos

$$x(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)q(x-1) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)xq(x)$$

De donde se sigue que $q(x)$ debe satisfacer $q(x) = q(x-1)$ para todo x. Como esta igualdad se debe cumplir aunado a que $q(5) = 1$, nos da que $q(x) = 1$.
Paso 9. Por lo tanto solo hay un polinomio que cumple con lo requerido y es

$$p(x) = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x.\blacksquare$$