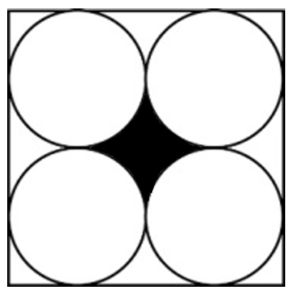
Competencia de Matemáticas por Equipos 2023

Nivel Medio Superior

Segundo Listado de Problemas

Problema 1 (3 puntos)**.** *El área del cuadrado que se presenta en la imagen es 64, ¿cuál es el radio del círculo con mayor área que se puede dibujar en el espacio sombreado?*



Solución: Como el área del cuadrado es 64, el radio de cada uno de lo círculos en la imagen es 2. Sea d el diámetro del círculo buscado y consideremos el triángulo rectángulo cuyos vértices son los centros de tres de los círculos en la imagen. El teorema de Pitágoras asegura que

$$(2+2)^2 + (2+2)^2 = (2+2+d)^2.$$

De lo anterior, se sigue que $32 = (4+d)^2$. Luego, $d = 4\sqrt{2} - 4$ y en consecuencia, el radio del círculo buscado es $r = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Problema 2 (4 puntos). *Suponga que θ es un ángulo entre 0 y π para el cual*

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta}, \tag{1}$$

¿cuáles son todos los posibles valores de $\tan\theta$?

Solución: Si elevamos ambos lados de (1) al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\theta}{2} &= 1+\sin\theta - 2\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1-\sin\theta} + 1 - \sin\theta\\ &= 2 - 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= 2(1-|\cos\theta|).\end{aligned}$$

Usando la siguiente identidad

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2},$$

se obtiene

$$\frac{1-\cos\theta}{2} = 2(1-|\cos\theta|).$$

Lo cual implica que

$$1-\cos\theta = 4(1-|\cos\theta|).$$

Si $\cos\theta \geq 0$, entonces $1-\cos\theta = 4(1-\cos\theta)$, lo cual implica que $3\cos\theta = 3$. Luego, debe pasar que $\cos\theta = 1$ y en consecuencia $\tan\theta = 0$. Si $\cos\theta < 0$, entonces $1-\cos\theta = 4(1+\cos\theta)$, en consecuencia $5\cos\theta = -3$ y $\cos\theta = -3/5$. De lo anterior, se sigue que $\sec\theta = -5/4$ y como $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$, esto asegura que $\tan^2\theta = 16/9$. Como $\cos\theta \leq 0$ y $\sin\theta \geq 0$ en el intervalo considerado, concluimos que $\tan\theta = -4/3$.

Problema 3 (5 puntos)**.** *Una función f definida en los enteros positivos satisface que si $d_1, \ldots, d_k$ son todos los divisores de n, entonces $f(d_1) + \cdots + f(d_k) = n$. Calcule el valor de $f(20)$.*

Solución: Primero notemos que $f(1) = 1$ y que si p es un número primo

$$f(p) = p - f(1) = p - 1.$$

Como el conjunto de divisores de 20 es $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, se sigue de la propiedad de la función f que

$$20 = f(1) + f(2) + f(4) + f(5) + f(10) + f(20).$$

Por lo cual $f(20) = 20 - f(1) - f(2) - f(4) - f(5) - f(10)$.

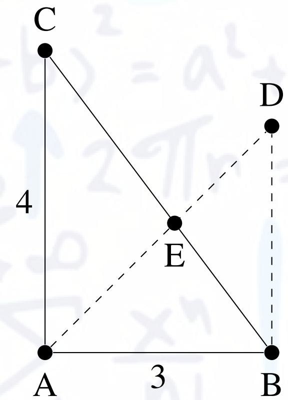
Puesto que 2 y 5 son primos, sabemos que $f(2) = 1$ y $f(5) = 4$. Por otro lado, el conjunto de divisores de 4 es $\{1, 2, 4\}$ y el conjunto de divisores de 10 es $\{1, 2, 5, 10\}$, por lo cual

$$f(4) = 4 - f(1) - f(2) = 4 - 1 - 1 = 2 \text{ y}$$
$$f(10) = 10 - f(1) - f(2) - f(5) = 10 - 1 - 1 - 4 = 4.$$

En consecuencia $f(20) = 20 - 1 - 1 - 2 - 4 - 4 = 8$.

Problema 4 (4 puntos)**.** *Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitud 3 y 4. Encuentra la longitud de la bisectriz del ángulo recto.*

Solución:



Denotamos por AB al segmento que une los puntos A y B, denotamos por $\overline{AB}$ la longitud del segmento AB.

- Paso 1: Trazamos la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, denotamos por E al punto donde intersecta esta bisectriz al lado BC y denotamos por D al punto donde intersecta a la recta paralela a AC por B. El problema pide calcular la longitud $x = \overline{AE}$. Como AC y BD son paralelos, los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle DEB$ son semejantes y por lo tanto,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}. \tag{2}$$

- Paso 2: Como $\angle BAD = 45°$ entonces

$$\overline{BD} = \overline{AB} = 3.$$

  Además,

$$\overline{AD} = \overline{AB}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}. \tag{3}$$

  Como $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$ entonces

$$\overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = 3\sqrt{2} - x$$

- Paso 3: Sustituimos (3) en (2)

$$\frac{x}{3\sqrt{2} - x} = \frac{4}{3}.$$

  Resolvemos para x y obtenemos

$$x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

El problema también se puede resolver usando geometría analítica tomando los puntos $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ y $C = (0,4)$. En este caso, encontramos la intersección de la recta del lado AD, cuya ecuación es

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

con la recta de la bisectriz AD cuya ecuación es $y = x$. Resolviendo ambas ecuaciones simultaneamente obtenemos $x = y = \frac{12}{7}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{AE} &= \text{distancia}(A, E) \\
&= \text{distancia}\left((0,0), \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)\right) \\
&= \frac{12}{7}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

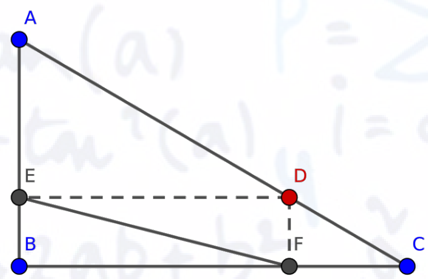
Problema 5 (5 puntos)**.** *Decimos que un número entero positivo tiene sus dígitos en orden estrictamente creciente si al leer los dígitos de izquierda a derecha estos van aumentando. Por ejemplo,* 1358 *tiene sus dígitos en orden estrictamente creciente mientras que* 4506 *no. ¿Cuántos enteros positivos tienen sus dígitos en orden estrictamente creciente?*

Solución:

Consideremos el conjunto de los dígitos $A = \{1, 2, ..., 9\}$. Observar que cada subconjunto del conjunto A se puede ordenar de una única manera como un entero positivo que tiene sus dígitos en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, el subconjunto $B = \{3, 6, 7\} \subset A$ se ordena como el número 367, mientras que el subconjunto $B = \{2, 5, 3, 6, 7\} \subset A$ se ordena como el número 23567, el vacío $\emptyset$ corresponde al número 0. Por lo tanto, cada subconjunto de A corresponde a uno de los números buscados y viceversa. El número de subconjuntos de A es $2^9 = 512$ y por lo tanto hay 512 números enteros no negativos con sus dígitos en orden estrictamente creciente. Si quitamos al cero, concluimos que tenemos 511 enteros positivos con sus dígitos en orden estrictamente creciente.

Para determinar que el número de subconjuntos de A es $2^9 = 512$ podemos observar que cada subconjunto $B \subset A$ queda determinado si especificamos si $1 \in B$ o $1 \notin B$, $2 \in B$ o $2 \notin B$, ... , $9 \in B$ o $9 \notin B$. Es decir, hay dos posibilidades para cada elemento de A, por lo tanto tenemos 2^9 posibilidades para formar subconjuntos de A.

Problema 6 (5 puntos). *En un triángulo rectángulo ABC se escoge un punto D sobre la hipotenusa AC. Trazamos perpendiculares DE y DF a los lados AB y CB respectivamente. Determina el punto D para el cual EF tiene longitud mínima.*



Solución:

Poniendo el origen en el vértice B, pongamos coordenadas a los vértices $C = (c, 0)$ y $A = (0, a)$, además, $D = (x, y)$. El problema entonces se traduce en encontrar el valor mínimo para la distancia $\overline{EF}$ en términos de a, c.

Primero, observar que la distancia $\overline{EF}$ es

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \text{distancia}(E, F) \\ &= \text{distancia}\left((x, 0), (0, y)\right) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{4}$$

La ecuación del lado AC es

$$y = \frac{a}{c}(c - x)$$

Sustituyendo esta ecuación en (4) tenemos

$$\overline{EF}^2 = \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2\right) x^2 - 2\frac{a^2}{c} x + a^2 \tag{5}$$

Esta es una parabola. La abscisa del vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

y este vértice es un mínimo si $a > 0$. En este caso, tomando en cuenta (5) tenemos

$$x_{\text{min}} = \frac{a^2 c}{a^2 + c^2}$$

Sustituyendo en (5) obtenemos la mínima distancia posible para $\overline{EF}$,

$$d_{\text{min}} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Problema 7 (3 puntos)**.** *Encuentra todos los valores x que satisfacen la siguiente desigualdad*

$$\log_{10}(x+2) \leq 1.$$

Solución:

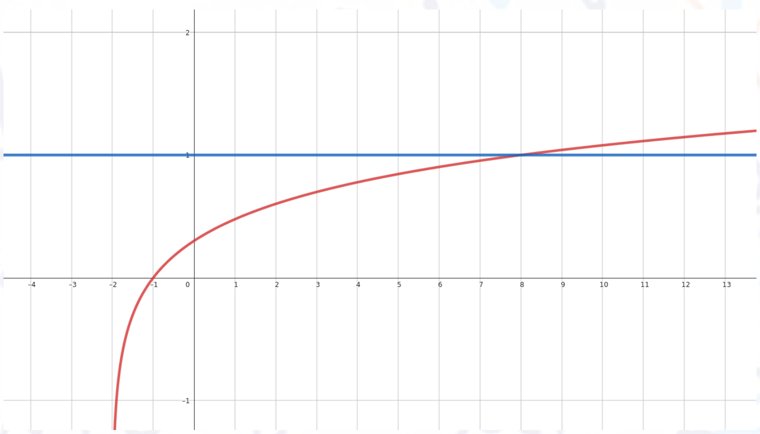
Primero notemos que la desigualdad solo tiene sentido para $-2 < x$. Por otro lado, como la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 10^x$ es creciente, podemos aplicarla a la desigualdad

$$\log_{10}(x+2) \leq 1$$

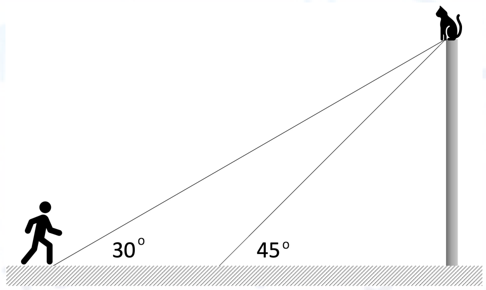
para obtener

$$x + 2 \leq 10^1 = 10.$$

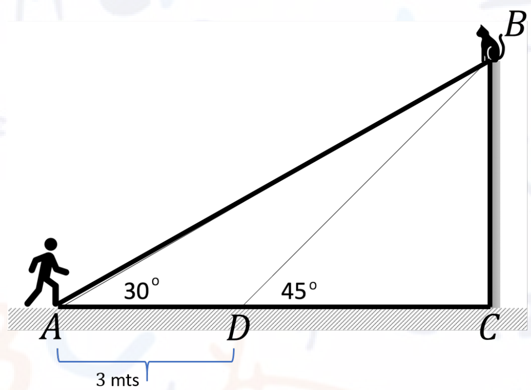
Combinando las dos restricciones obtendríamos que la solución es $-2 < x \leq 8$.



Problema 8 (3 puntos)**.** *Un gato subió a un poste de luz y su dueño lo observó de lejos formando con el piso un ángulo de* 30°*, avanzó 3 metros hacia el pie del poste y observó a su gato formando un ángulo de elevación de* 45° *con el piso. ¿Cuál es la altura del poste?*



Solución:
Nos apoyaremos de la siguiente figura para dar solución al problema:



Usando la figura anterior observamos que

$$\cot(30^\circ) = \frac{3 + DC}{BC} \quad \text{y,} \quad \cot(45^\circ) = \frac{DC}{BC}$$

despejando DC de las igualdades anteriores

$$DC = BC\cot(30^\circ) - 3 = BC\cot(45^\circ),$$

factorizando BC de la última iguadad

$$BC[\cot(30^\circ) - \cot(45^\circ)] = 3.$$

Por tanto

$$BC = \frac{3}{\cot(30^\circ) - \cot(45^\circ)} = \frac{3}{\sqrt{3} - 1}.$$

Así que la altura buscada es $\frac{3}{\sqrt{3}-1} \approx 4.098$ metros.

Problema 9 (4 puntos). *Encuentra los valores de c para los cuales el sistema*

$$cx + 5y = \sqrt{5}$$
$$x + cy = 1$$

no tiene solución.

Solución:
Para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$cx + 5y = \sqrt{5} \tag{6}$$
$$x + cy = 1, \tag{7}$$

multiplicamos la ecuación (7) por $-c$ y sumamos con la ecuación (6)

$$y(5 - c^2) = \sqrt{5} - c,$$

es decir,

$$y(\sqrt{5} - c)(\sqrt{5} + c) = \sqrt{5} - c.$$

De la igualdad anterior, observamos que si $c = \sqrt{5}$ hay una infinidad de soluciones. Por tanto el único valor para el cual el sistema no tiene solución es para $c = -\sqrt{5}$.

Problema 10 (4 puntos)**.** *Sea f es una función que satisface*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todos los valores de x, y.

Si n es un número natural diferente de cero, demuestra que:

$i)$ $f(n) = nf(1)$

$ii)$ $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$

Solución:
Para demostrar el inciso $i)$ usamos que para un número natural n,

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}.$$

Por la propiedad de linealidad que satisface la función f

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1 + \cdots + 1) \\ &= f(1) + f(1) + \cdots f(1) \quad (n \text{ veces}) \\ &= nf(1). \end{aligned}$$

Para demostrar el inciso $ii)$ usamos la siguiente igualdad

$$n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ veces}}, \tag{8}$$

además, por la propiedad de linealidad de la función f

$$\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ veces}} = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots \frac{1}{n}}_{n \text{ veces}}\right). \tag{9}$$

Usando (8) y (9)

$$\begin{aligned} n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \\ &= f(1). \end{aligned}$$

Por tanto

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1).$$