Competencia de Matemáticas por Equipos 2023

Nivel Medio Superior

Soluciones al Tercer Listado de Problemas

Problema 1 (3 puntos)**.** *La señora Ana García es propietaria de un terreno con bardas de igual longitud que forman ángulos rectos, como se muestra en la figura. El terreno posee la propiedad de que* "su perímetro en km y su área en km^2 están representadas por el mismo número"*. ¿Qué curioso, verdad? Determine, en metros, el perímetro del terreno.*

Solución. Sea x la longitud, medida en kilómetros, de cada una de las bardas del terreno. Puesto que son 28 bardas, el perímetro es $28x$. Más aún, tomando en cuenta que el terreno puede dividirse en 25 cuadrados de lado x, el área del terreno es $25x^2$. Entonces, la propiedad del terreno se traduce en la ecuación

$$25x^2 - 28x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(25x - 28) = 0.$$

Descartando la raíz $x = 0$, tenemos que la solución de la ecuación que le da sentido al problema es $x = 1.12$. Por tanto, el perímetro del terreno, medido en metros, es

$$28 \times 1000 \times 1.12 = 31,360.$$

■

Problema 2 (3 puntos). *Cierto bachillerato admite en cada ciclo escolar como mínimo 300 y como máximo 500 alumnos. Para el Simulacro de Sismo Nacional 2023 se decidió formar grupos de un mismo tamaño con el total de alumnos inscritos. Al proponer formar 7 equipos sobraban 4 alumnos, al formar 6 sobraban 3 y al formar 5 sobraban 2. ¿Cuál es el total de alumnos inscritos? ¿Cuántos equipos, y de qué tamaño, se pueden formar sin que sobren alumnos?*

Primera solución. Llamémosle x al número total de alumnos inscritos. Observemos que la condición de que "al formar 7 equipos sobraban 4 alumnos" se puede reformular como sigue: *si hubiera 3 alumnos más, al formar 7 equipos no sobraría ningún alumno*. Algebraicamente, esto nos dice que $x + 3$ es múltiplo de 7. Similarmente, la condición de que "al formar 6 equipos sobraban 3" nos dice que con 3 alumnos más no sobraría ningún alumno al formar 6 equipos. Es decir, también se tiene que $x + 3$ es múltiplo de 6. De igual manera, la última condición es equivalente a que $x + 3$ sea múltiplo de 5.

Hemos llegado a que $x + 3$ es múltiplo de 7, 6 y 5 simultáneamente. Puesto que el mínimo común múltiplo de 7, 6 y 5 es $7 \times 6 \times 5 = 210$, concluimos que $x + 3$ es múltiplo de 210. Luego x es algún entero de la siguente lista:

$$\ldots -213, -3, 207, 417, 627 \ldots$$

Finalmente, la condición de que x debe estar entre 300 y 500 implica que es $x = 417$. En otras palabras, hay 417 alumnos inscritos en total. Aún más, como $417 = 3 \cdot 139$, se concluye que se pueden formar 3 equipos de 139 alumnos o 139 equipos de 3 alumnos. ■

Segunda solución. Denotemos por x al total de alumnos inscritos. Entonces, el problema nos dice que

$$x = 7a + 4, \quad x = 6b + 3 \quad \text{y} \quad x = 5c + 2,$$

para algunos enteros a, b, c. En otras palabras, el problema puede modelarse mediante el siguiente sistema lineal de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \mod 7 \\ x &\equiv 3 \mod 6 \\ x &\equiv 2 \mod 5 \end{aligned}$$

Aún más, la teoría para resolver este tipo de sistemas nos dice que la solución estará expresada en módulo $n = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, dado que 5,6 y 7 son primos relativos.

Ahora, una manera de resolver el sistema es, primero, encontrar enteros q_1, q_2 y q_3 tales que

$$\frac{210}{7}\, q_1 = 30\, q_1 \equiv 1 \mod 7$$

$$\frac{210}{6}\, q_2 = 35\, q_2 \equiv 1 \mod 6$$

$$\frac{210}{5}\, q_3 = 42\, q_3 \equiv 1 \mod 5$$

Dado que son ecuaciones independientes, podemos verificar que $q_1 = 4$, $q_2 = 5$ y $q_3 = 3$ son soluciones particulares. Luego, una solución al sistema lineal de congruencias inicial es dado por

$$x = 4 \cdot 30 \cdot q_1 + 3 \cdot 35 \cdot q_2 + 2 \cdot 42 \cdot q_3 = 1257 \mod 210$$

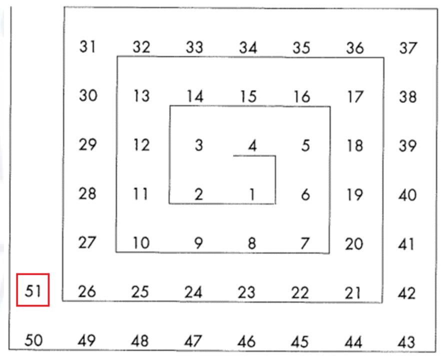
es decir,

$$x = 210z + 207,$$

con z un entero. En particular, con $z = 1$, obtenemos una solución entre 300 y 500, a saber, $x = 417$.

En otras palabras, hay 417 alumnos inscritos en total. Aún más, como $417 = 3 \cdot 139$, se concluye que se pueden formar 3 equipos de 139 alumnos o 139 equipos de 3 alumnos. ■

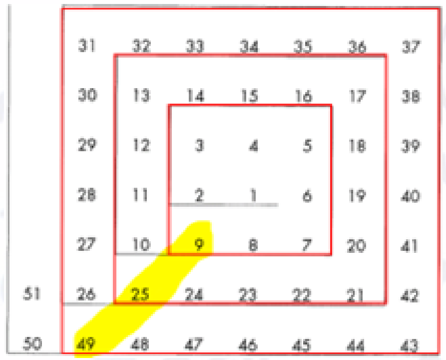
Problema 3 (3 puntos)**.** *En cierta región del país, se descubrieron unas grutas que encierran un fascinante espectáculo natural. Para cuidarlo, y al mismo tiempo recibir visitantes, sólo se permite el acceso por un agujero que la gruta posee en la parte superior, a ras de suelo. Ante el gran número de visitantes, se dispuso una fila como se muestra en la figura:*



Visto desde arriba, la entrada a la gruta se ubica en el número 1 *y las personas se forman desde el* 2 *en adelante.*

En una ocasión, Karla, Fernando, Lucía y Martín fueron a visitar la gruta, pero no llegaron juntos. De hecho, cuando Karla llegó a la entrada, es decir, al número 1*, Fernando iba en el lugar* 51*, Lucía en el* 84 *y Martín en el* 3658*. Observemos que, por estar en el lugar* 51*, Fernando está en la cuarta columna hacia la izquierda y segundo renglón hacia abajo desde la entrada de la gruta. ¿En qué renglón y columna se ubica Lucía? ¿Y Martín?*

Solución. En la espiral que se forma por los números que representan los lugares de la fila es posible identificar varios patrones que, en particular, nos pueden ayudar a resolver el problema. Por ejemplo, en esta solución vamos a aprovechar el siguiente hecho (ver figura abajo): si marcamos cuadrados en la espiral con centro en la entrada de la gruta, la diagonal (amarilla) desde la posición de entrada a la esquina inferior izquierda de cada cuadrado recorre los cuadrados de los números naturales impares.

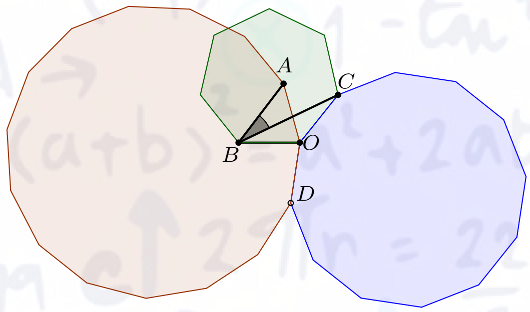


Notemos que 84 está próximo a 81, que es el cuadrado de 9. Ahora, la posición 81 está en la esquina inferior izquierda del cuarto cuadrado, es decir, en la cuarta columna hacia la izquierda y cuarto renglón hacia abajo desde la entrada de la gruta. De ahí, avanzando una posición a la izquierda y dos hacia arriba se encuentra el 84. En otras palabras, *Lucía se encuentra en la quinta columna a la izquierda y segundo renglón hacia abajo desde la entrada de la gruta.*

Similarmente, 3658 está próximo a 3721, que es el cuadrado de 61. La posición 3721 está en la esquina inferior izquierda del trigésimo cuadrado, es decir, en la columna 30 hacia la izquierda y el renglón 30 hacia abajo desde la entrada de la gruta. Observemos que dicho cuadrado tiene 61 personas formadas en cada lado. Por tanto, si se retroceden 60 posiciones desde la esquina inferior izquierda se llega a la posición 3661, que es la esquina inferior derecha del trigésimo cuadrado; de ahí retrocediendo 3 posiciones (hacia arriba) se llega al lugar 3658. Es decir, *Martín se encuentra en la trigésima columna a la derecha y vigésimo séptimo renglón hacia abajo de la entrada de la gruta.* ■

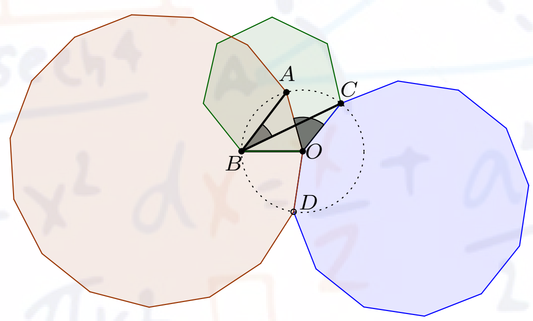
Comentario: Queremos mencionar que la disposición de los números en la figura del problema forman parte de la llamada "Espiral de Ulam".

Problema 4 (4 puntos)**.** *En la figura, se tienen un heptágono, un dodecágono y un pentadecágono, todos regulares. Determine la medida del ángulo* $\angle ABC$.



Primera solución. Primero veamos que $\angle AOC = 54°$. Recordemos que en un polígono de n lados la suma de sus ángulos internos es igual a $180° \times (n-2)$. En el caso de un polígono regular, en el que todos los ángulos son iguales, se sigue que cada ángulo interno de un n-ágono regular mide $\frac{180° \times (n-2)}{n}$. En particular, los ángulos internos de un dodecágono regular son iguales a $150°$, y los ángulos internos de un pentadecágono regular son iguales a $156°$. En el caso de la figura del problema, esto nos dice que es $\angle COD = 150°$ y $\angle DOA = 156°$. Luego, puesto que dichos ángulos hacen una vuelta completa con el $\angle AOC$, se tiene que

$$\angle AOC = 360° - \angle COD - \angle AOD = 360° - 150° - 156° = 54°.$$



Por otra parte, observemos que $BO = OC$, ya que son lados del heptágono regular. También $CO = OD$, por ser lados del dodecágono regular. De igual manera, $DO = OA$, por ser lados del pentadecágono regular. Esto quiere decir que $OA = OB = OC = OD$, por lo que A, B, C y D están sobre una misma circunferencia de centro O, cuyo radio es igual a la longitud común de los lados de los polígonos. Finalmente, en dicha circunferencia, el ángulo $\angle AOC$ es el ángulo central que abre el arco $\widehat{AC}$, mientras que $\angle ABC$ es un ángulo inscrito que abre el mismo arco. Por el teorema del ángulo inscrito y central, se sigue que $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, es decir, es $\boldsymbol{\angle ABC = 27°}$. ■

Comentario: Observe que si reemplazamos el heptágono por cualquier otro polígono regular con lado OC, el ángulo $\angle ABC$ seguiría midiendo $27°$, ya que B

seguiría estando en la misma circunferencia y, por tanto, el ángulo $\angle ABC$ seguiría siendo inscrito, con medida igual a la mitad del ángulo central.

Segunda solución. Recordemos nuevamente que cada ángulo interno de un n-ágono regular mide $\frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$. En particular, las respectivas medidas de los ángulos internos de un heptágono, dodecágono y pentadecágono regular son $\frac{900^\circ}{7}$, 150° y 156°. Aplicando esto a la figura del problema, se tiene que $\angle BOC = \frac{900^\circ}{7}$, $\angle COD = 150^\circ$ y $\angle AOD = 156^\circ$.

Puesto que $\angle BOD$ completa una vuelta con $\angle BOC$ y $\angle COD$, se sigue que

$$\angle BOD = 360^\circ - \angle BOC - \angle COD = 360^\circ - \frac{900^\circ}{7} - 150^\circ = \frac{570^\circ}{7}.$$

Por otro lado, como $\angle AOB$ y $\angle BOD$ forman a $\angle AOD$, tenemos que

$$\angle AOB = \angle AOD - \angle BOD = 156^\circ - \frac{570^\circ}{7} = \frac{522^\circ}{7}.$$

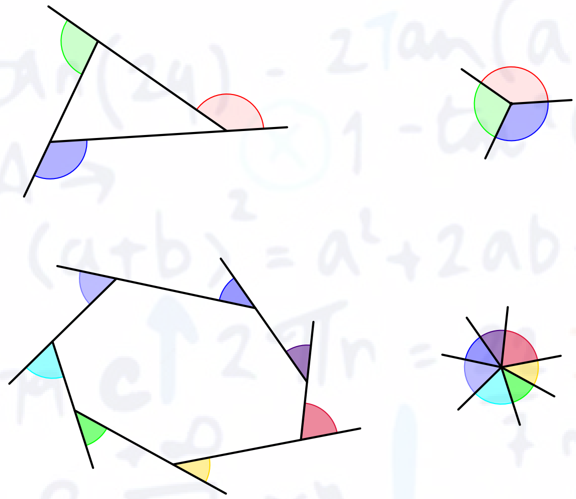
Nuestro objetivo es calcular $\angle ABC$, el cual es la diferencia de los ángulos $\angle ABO$ y $\angle CBO$. Como en la solución anterior, es $OA = OB = OC = OD$. Luego, los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle BOC$ son isósceles, por lo que tienen dos ángulos iguales. Como en todo triángulo los ángulos internos suman 180°, se tiene que $\angle ABO$ y $\angle BAO$ son ángulos iguales que suman 180° con $\angle AOB = \frac{522^\circ}{7}$. Luego, dichos ángulos miden $\angle ABO = \angle BAO = \frac{369^\circ}{7}$. Similarmente, en el triángulo $\triangle BOC$ se tiene que $\angle BCO = \angle CBO$ y suman 180° con $\angle BOC = \frac{900^\circ}{7}$; luego, se tiene que $\angle BCO = \angle CBO = \frac{180^\circ}{7}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\angle ABC = \angle ABO - \angle CBO = \frac{369^\circ}{7} - \frac{180^\circ}{7} = 27^\circ.$$

■

Tercera solución. Siguiendo la idea de la primera solución, otra manera de probar que el ángulo entre el dodecágono y el pentadecágono del problema es $\angle AOC = 54^\circ$ es la siguiente: notemos que, en todo polígono convexo, la suma de los *ángulos externos* es igual a 360°. [1] Una manera de probar este hecho, como se ilustra en la figura, es trazando por un mismo punto semirrectas paralelas a los lados del polígono y viendo que los ángulos externos completan una vuelta:

[1]Un polígono es *convexo* cuando todos sus ángulos internos miden menos de 180°. En el caso de polígonos no convexos, es un poco menos claro cuál es el ángulo exterior, y en ese caso la suma de los ángulos exteriores sólo podemos afirmar que es múltiplo de 360°.



Ahora bien, en el caso de un polígono regular de n lados, todos los ángulos externos son iguales, por lo que cada uno de éstos mide $360°/n$. En particular, el ángulo exterior de un dodecágono regular mide $360°/12 = 30°$, mientras que el ángulo exterior de un pentadecágono regular mide $360°/15 = 24°$.

Volviendo a la figura del problema, observemos que, como el ángulo $\angle AOC$ está entre el pentadecágono y el dodecágono, su medida es la suma de un ángulo exterior de cada uno de ellos, es decir, es $\angle AOC = 30° + 24° = 54°$.

Por otro lado, como en la primera solución, tenemos que $OA = OB = OC = OD$. Entonces, al ser isósceles los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle BOC$, se sigue que $\angle ABO = \angle BAO$ y $\angle CBO = \angle BCO$. Tomando en cuenta que en todo triángulo la suma de los ángulos internos es igual a $180°$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\angle ABC &= 2\angle ABO - 2\angle CBO \\ &= (\angle ABO + \angle BAO) - (\angle CBO + \angle BCO) \\ &= (180° - \angle AOB) - (180° - \angle BOC) \\ &= \angle BOC - \angle AOB \\ &= \angle AOC \\ &= 54°, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\boldsymbol{\angle ABC = 27°}$. ■

Problema 5 (5 puntos). *Al expresar un número natural n como un producto $n = ab$, uno de los factores es menor igual que $\sqrt{n}$ y el otro es mayor o igual, es decir, $a \leqslant \sqrt{n} \leqslant b$. Basada en esto, Sofía implementó el siguiente algoritmo para hallar todos los divisores de n: comenzando en $k = 1$, se verifica si k divide a n. Si sí, se registran k y n/k como divisores de n y se pasa al siguiente número; si no, simplemente se pasa al siguiente número. Este proceso se repite mientras $k \leqslant \sqrt{n}$, tras lo cual el algoritmo finaliza.*

A la computadora de Sofía, cada paso le toma una milésima de segundo. Por ejemplo, en 5 milésimas de segundo obtiene los divisores de $n = 33$, ya que sólo debe verificar si $k = 1, 2, 3, 4$ y 5 dividen a 33, pues es $5 \leqslant \sqrt{33} \approx 5.74456$

Si Sofía pone a su computadora a obtener los divisores de cada número desde 1 *hasta* 2023*, uno tras otro y sin parar, ¿cuántos segundos le tomará obtenerlos?*

Solución. Para fines ilustrativos, analicemos para los primeros valores de n cuáles son los números k que, de acuerdo con el algoritmo de Sofía, la computadora verificará si lo dividen:

- Para $n=1$, la computadora sólo checará si $k=1$ divide a 1, ya que es $1=\sqrt{1}$
- Para $n=2$, la computadora checará si $k=1$ divide a 2, ya que es $1<\sqrt{2}\approx 1.41$
- Para $n=3$, la computadora checará si $k=1$ divide a 3, ya que es $1<\sqrt{3}\approx 1.73$
- Para $n=4$, sólo checará si $k=1$ y $k=2$ dividen a 4, ya que es $2=\sqrt{4}$
- Para $n=5$, sólo checará si $k=1$ y $k=2$ dividen a 5, ya que es $2<\sqrt{5}\approx 2.23$
- Para $n=6$, sólo checará si $k=1$ y $k=2$ dividen a 6, ya que es $2<\sqrt{6}\approx 2.44$
- Para $n=7$, sólo checará si $k=1$ y $k=2$ dividen a 7, ya que es $2<\sqrt{7}\approx 2.64$
- Para $n=8$, sólo checará si $k=1$ y $k=2$ dividen a 8, ya que es $2<\sqrt{8}\approx 2.82$
- Para $n=9$, sólo checará si $k=1,2,3$ dividen a 9, ya que es $3=\sqrt{9}$
- Para $n=10$, sólo checará si $k=1,2,3$ dividen a 10, pues es $3<\sqrt{10}\approx 3.16$

  $\vdots$
- Para $n=15$, sólo checará si $k=1,2,3$ dividen a 10, pues es $3<\sqrt{15}\approx 3.87$

Por lo tanto, tomando en cuenta que a la computadora de Sofía cada paso le toma una milésima de segundo, se tiene lo siguiente:

- Para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, la computadora de Sofía tardará una milésima con cada uno, ya que sólo debe hacer una verificación.

- Para $n = 4, 5, 6, 7$ y 8, la computadora tardará dos milésimas con cada uno, pues hace dos verificaciones.
- Para $n = 9, 10, 11, 12, 13, 14$ y 15, la computadora tardará tres milésimas de segundo con cada uno.

En otras palabras, si llamamos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ a los tiempos (medidos en milésimas de segundo) que a la computadora de Sofía tomará en encontrar los divisores de cada número, lo anterior se expresa como sigue:

- $t_1 = t_2 = t_3 = 1$
- $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = 2$
- $t_9 = t_{10} = t_{11} = t_{12} = t_{13} = t_{14} = t_{15} = 3$

Notemos que el tiempo que toma hacer las verificaciones aumenta una milésima de segundo cada vez que llegamos a un cuadrado perfecto. Esto se debe a que en ese punto la raíz cuadrada alcanza otro número natural. Más precisamente: si el entero positivo n está entre dos cuadrados consecutivos, digamos, $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$, entonces el tiempo de verificación para n es de m milésimas de segundo, es decir, es $t_n = m$.

Ahora, el problema nos pide obtener el tiempo total que a la computadora le toma obtener todos los divisores desde 1 hasta 2023 cuando trabaja con uno tras otro y sin parar; esto es, buscamos la suma de los tiempos individuales $t_1+t_2+t_3+\cdots+t_{2023}$. Vamos a organizar dicha suma en varios renglones, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|c}
\text{Renglón 1:} & t_1 + t_2 + t_3 + \\
\text{Renglón 2:} & t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + \\
\text{Renglón 3:} & t_9 + t_{10} + \cdots + t_{15} + \\
\text{Renglón 4:} & t_{16} + t_{17} + \cdots + t_{24} + \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

La idea es que los tiempos que aparezcan en cada renglón empiecen con el de un cuadrado perfecto y continúen con todos hasta antes del siguiente cuadrado. De esta manera, por las observaciones anteriores, en el primer renglón todos los sumandos son iguales a 1, en el segundo renglón, todos los sumandos valen 2, en el tercero 3, etc.

$$\begin{array}{r|c} \text{Renglón 1:} & 1+1+1+ \\ \text{Renglón 2:} & 2+2+2+2+2+ \\ \text{Renglón 3:} & 3+3+3+3+3+3+3+ \\ \text{Renglón 4:} & 4+4+4+4+4+4+4+4+4+ \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

En general, el renglón m está conformado por $t_{m^2}, t_{m^2+1}, \ldots, t_{(m+1)^2-1}$, es decir, los tiempos correspondientes a los números empezando en m^2 y terminando en $(m+1)^2-1$ (el número anterior al siguiente cuadrado). Más aún, todos ellos son iguales a m:

$$\text{Renglón } m\text{:} \mid m+m+m+\cdots+m$$

Ahora, notemos que la cantidad de sumandos que hay en cada renglón es la diferencia del correspondiente cuadrado y el siguiente. Es decir, como en el renglón m empezamos en m^2 y terminamos uno antes de $(m+1)^2$, se sigue que en el renglón m hay $(m+1)^2-m^2$ sumandos, o sea, hay

$$(m+1)^2-m^2=(m^2+2m+1)-m^2=2m+1.$$

En resumen, en el renglón m hay $2m+1$ sumandos y todos ellos valen m. Luego, si llamamos S_m a la suma de todos los términos de dicho renglón, tenemos que $S_m=m(2m+1)=2m^2+m$.

Por otra parte, notemos que t_{2023}, que es el último elemento de nuestra suma, pertenece al renglón 44, ya que el cuadrado siguiente a 2023 es $45^2=2025$. Esto quiere decir que el último renglón a considerar es el renglón 44, en el cual deberían aparecer los tiempos de los números desde $44^2=1936$ hasta $45^2-1=2024$. Sin embargo, el término t_{2024} no es parte de nuestra suma, por lo que vamos a calcular la suma de los tiempos hasta 2024 y al final restaremos $t_{2024}=44$.

Hemos visto que la suma de los tiempos correspondientes al renglón m es $S_m=2m^2+m$. También vimos que la suma consta de 44 renglones, que van desde 1 hasta 44. Es decir, la suma de los tiempos desde 1 hasta 2023 es la suma de los 44 renglones, quitando t_{2024}. En virtud de todo esto, tenemos que la suma buscada puede expresarse como

$$\begin{aligned} t_1+t_2+\cdots+t_{2023} &= (t_1+t_2+\cdots+t_{2023}+t_{2024})-t_{2024} \\ &= (S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{44})-t_{2024} \\ &= \big((2{\cdot}1^2+1)+(2{\cdot}2^2+2)+\cdots+(2{\cdot}44^2+44)\big)-t_{2024} \\ &= 2(1^2+2^2+\cdots+44^2)+(1+2+3+\cdots+44)-t_{2024}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la fórmula de Gauss y la fórmula para la suma de los cuadrados,

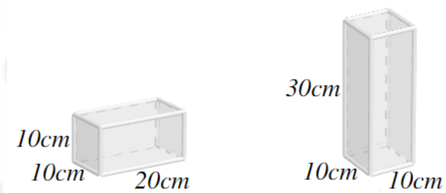
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

tenemos que

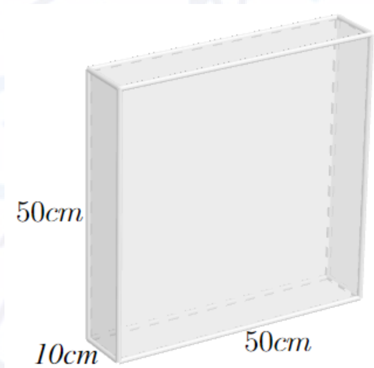
$$\begin{aligned} t_1+t_2+\cdots+t_{2023} &= 2(1^2+2^2+\cdots+44^2)+(1+2+3+\cdots+44)-t_{2024} \\ &= 2\left(\frac{44\cdot 45\cdot 89}{6}\right)+\frac{44\cdot 45}{2}-44 \\ &= 58740+990-44 \\ &= 59686 \end{aligned}$$

Hemos obtenido que el tiempo total, medido en milésimas de segundo, es igual a 59686. Luego, el tiempo en segundos es $\mathbf{59.686}$, es decir, prácticamente un minuto para obtener los divisores de 1 a 2023. ■

Problema 6 (4 puntos)**.** *En un comercio se requiere almacenar dos tipos de estuches rectangulares que contienen perfumes. Como se ilustra en la figura, un tipo de estuche tiene dimensiones (largo×ancho×alto)* $20\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$ *y el otro tipo* $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 30\text{cm}$*:*



Los estuches se deben almacenar exactamente en las posiciones mostradas arriba para evitar derrames. Para este propósito, la dueña piensa comprar cajas de madera de dimensiones $50\text{cm} \times 10\text{cm} \times 50\text{cm}$*:*

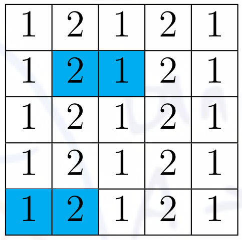


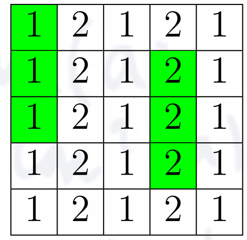
Los trabajadores advierten que no será posible almancenar los perfumes en las cajas de madera sin que sobre espacio. La dueña afirma que sí. ¿Quién tiene razón?

Solución. Colocándonos de frente a la caja de madera, ésta se ve como un cuadrado de $50\text{cm} \times 50\text{cm}$. Cuadriculémoslo en veinticinco cuadros de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$, como se muestra en la figura, y escribamos los números 1 y 2 en cada cuadrito de acuerdo al patrón que se muestra.

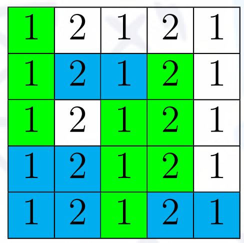
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1
1	2	1	2	1

Observemos que, no importa en qué lugar de la caja se coloque un estuche de $20\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$, la suma de los números de los cuadritos donde se ubique el estuche siempre es igual a tres. De manera similar, no importa dónde acomodemos cada estuche de dimensiones $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 30\text{cm}$, al ver de frente la caja tendremos que la suma de los números en los tres cuadritos donde éste se ubica es tres o seis.



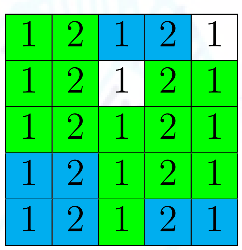


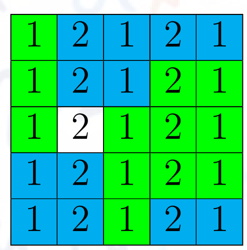
En cualquier caso, cada vez que colocamos algún estuche, sea del primer tipo o del segundo, *la suma de los números en los cuadritos de cada estuche es múltiplo de 3*. En consecuencia, **la suma total de los números escritos en los cuadritos que están donde se han colocado los estuches es múltiplo de 3**. Abajo se muestra un ejemplo, donde se han colocado algunos estuches y vemos que la suma en ese caso es 24:



Volviendo a la pregunta del problema: si fuera posible almacenar los escuches sin que sobre espacio, tendríamos que la suma de los veinticinco números escritos en toda la caja sería múltiplo de 3. Sin embargo, la suma de dichos números, vista por columnas es $5 + 10 + 5 + 10 + 5 = 35$. Puesto que 35 no es divisible entre 3, concluimos que **no es posible** almacenar los estuches en la caja sin que sobre espacio, dándole la razón a los trabajadores.

Más aún, como el múltiplo de 3 más cercano y menor a 35 es el número 33, se sigue que en el acomodo más óptimo siempre quedarán sin llenarse cuadros que suman 2, ya sea dos cuadritos escritos con el número 1 o un cuadrito con el número 2. Abajo se ilustran ambas posibilidades:



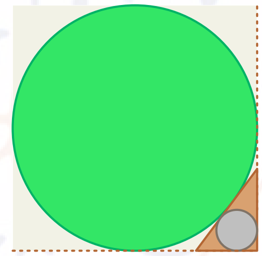


■

Problema 7 (5 puntos)**.** *La* sucesión de Fibonacci *se usa en profesiones como arquitectura y diseño gráfico para crear diseños estéticos. Dicha sucesión recursiva* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *se define por*

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Un arquitecto diseñó la recepción y jardín de un hotel, como se muestra en la figura: la recepción es triangular (café), y dentro de ésta, el área de los recepcionistas es un círculo (gris) tangente a los tres lados del triángulo. Por su parte, el jardín circular (verde) es tangente a un lado del triángulo y a la prolongación de los otros dos lados.



Para crear su diseño, el arquitecto eligió cuatro números consecutivos de la sucesión de Fibonacci f_n, f_{n+1}, f_{n+2} *y* f_{n+3} *y, con ellos, fijó las longitudes (*a*,* b *y* c*) de los lados del triángulo que forma la recepción del hotel como sigue:*

$$a = f_n \cdot f_{n+3}, \qquad b = 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \qquad \text{y} \qquad c = f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot f_{n+3}$$

(a) Demuestre que, con estas dimensiones, el triángulo que forma la recepción es un triángulo rectángulo.

(b) Al presentar el proyecto, el arquitecto afirmó que el área de los recepcionistas tiene radio $r = f_n \cdot f_{n+1}$*. ¿Es correcta dicha afirmación?*

(c) Los revisores del proyecto preguntaron al arquitecto si el radio del jardín también es el producto de dos números en la sucesión de Fibonacci. Después de efectuar algunos cálculos, el arquitecto obtuvo la respuesta y la comunicó a los revisores. ¿Qué respondió el arquitecto?

Solución. Comencemos simplificando la expresión de los números a, b y c. Para ello, utilizaremos la regla de recurrencia que define a la sucesión de Fibonacci, con el fin de expresar los cuatro números de la sucesión que escogió el arquitecto usando sólo dos. En particular, podemos expresar f_n y f_{n+3} en términos de f_{n+1} y f_{n+2} como sigue:

$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1} \qquad \text{y} \qquad f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$$

Sustituyendo en las expresiones para a y c, obtenemos que

$$\begin{aligned} a &= f_n \cdot f_{n+3} = (f_{n+2} - f_{n+1})(f_{n+2} + f_{n+1}) = f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2, \\ c &= f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot f_{n+3} = (f_{n+2} - f_{n+1}) \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot (f_{n+2} + f_{n+1}) \\ &= f_{n+2}^2 - f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+1}^2 = f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Recordemos, el que a, b y c sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo es equivalente a que satisfagan la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$. Utilizando las relaciones obtenidas arriba, se tiene que

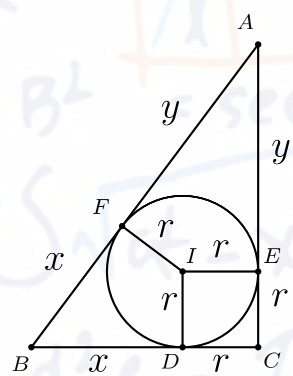
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2)^2 + (2f_{n+1}f_{n+2})^2 \\ &= (f_{n+2}^4 - 2f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 + f_{n+1}^4) + 4f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 \\ &= f_{n+2}^4 + 2f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 + f_{n+1}^4 = (f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra que, en efecto, a, b y c son longitudes de lados de un triángulo rectángulo, probando así el inciso (a).

Para el inciso (b), observemos que el área de los recepcionistas es el incírculo del triángulo de la recepción, el cual, como acabamos de probar, es un triángulo rectángulo. Vamos a demostrar que, en cualquier triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c, el radio r de su incírculo puede calcularse como

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Consideremos ahora un triángulo rectángulo ABC, como se muestra en la figura siguiente, y su circunferencia inscrita centrada en I, la cual toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente:



Recordemos que, al ser el radio perpendicular a la tangente, los ángulos en D, E y F son rectos. Más aún, al ser ABC un triángulo rectángulo en C, se sigue que el cuadrilátero $CDIE$ es un cuadrado de lado igual al radio r del incírculo. Por otra parte, los segmentos AE y AF son iguales, ya que son las tangentes desde A al círculo. Similarmente, es $BF = BD$. Llamando y y x a dichas longitudes comunes, como en la figura arriba, llegamos a que los lados a, b y c del triángulo satisfacen las siguientes igualdades:

$$a = x + r, \qquad b = y + r, \qquad c = x + y$$

Luego, se tiene que

$$a + b - c = (x + r) + (y + r) - (x + y) = 2r,$$

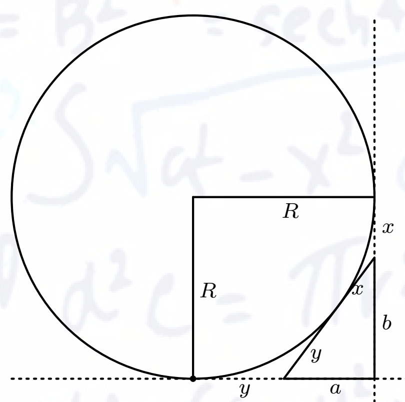
de donde se sigue la igualdad $r = \frac{a+b-c}{2}$, como queríamos demostrar. Utilizando las expresiones de a, b y c en términos de f_{n+1} y f_{n+2}, llegamos a que es

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}\left((f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2) + 2f_{n+1}f_{n+2} - (f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(2f_{n+1}f_{n+2} - 2f_{n+1}^2\right) = f_{n+1}\left(f_{n+2} - f_{n+1}\right) \\ &= f_{n+1} \cdot f_n, \end{aligned}$$

donde al final hemos utilizado nuevamente la relación de recurrencia de la sucesión de Fibonacci: $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$. Esto prueba que el radio del área de los recepcionistas es igual a $r = f_n \cdot f_{n+1}$, tal como afirma el arquitecto.

Para responder la pregunta planteada en el inciso (c), vamos a probar primero que el radio del jardín del hotel es igual a la mitad del perímetro del triángulo de la recepción[2]:

$$R = \frac{a + b + c}{2}$$



Para probar este hecho, observe nuevamente que se tiene un cuadrado en el que dos de sus lados son iguales a R, otro de los lados mide $y + a$ y el otro lado mide $x + b$.

[2]En general, en cualquier triángulo rectángulo, el radio de la *circunferencia exinscrita* que es tangente a la hipotenusa es igual al semipermímetro de dicho triángulo rectángulo.

Es decir, se tiene que $R = y + a$ y que $R = x + b$. Tomando en cuenta que es $x + y = c$, se sigue que

$$R = \frac{R+R}{2} = \frac{(y+a)+(x+b)}{2} = \frac{a+b+(x+y)}{2} = \frac{a+b+c}{2},$$

tal como queríamos probar. Sustituyendo las expresiones para a, b y c obtenidas inicialmente, tenemos que

$$\begin{aligned} R = \frac{a+b+c}{2} &= \frac{(f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2) + (2f_{n+1}f_{n+2}) + (f_{n+2}^2 + f_{n+1}^2)}{2} \\ &= \frac{2f_{n+2}^2 + 2f_{n+1}f_{n+2}}{2} = f_{n+2}(f_{n+2} + f_{n+1}) = f_{n+2} \cdot f_{n+3}, \end{aligned}$$

donde al final nuevamente hemos utilizado la recurrencia de la sucesión:

$$f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+3}$$

Esto prueba que R es efectivamente el producto de dos números de la sucesión de Fibonacci, tal como intuyeron los revisores al preguntar al arquitecto. ■

Problema 8 (4 puntos)**.** *En este problema:*

- *Exprese los coeficientes como enteros o fracciones, según sea el caso.*
- *No utilice aproximaciones decimales para expresar sus respuestas.*

Considere el conjunto de los números reales que son de la forma

$$A + B\sqrt[3]{6} + C\sqrt[3]{36},$$

donde A, B y C son números racionales (enteros o fracciones). Estos números, al sumar, restar, multiplicar o dividirse entre sí, resultan en números de esa misma forma:

(a) *Efectúe y simplifique la siguiente multiplicación para obtener un número de la forma presentada arriba:*

$$\left(-3 + 7\sqrt[3]{6}\right)\left(\tfrac{927}{677} + \tfrac{1486}{677}\sqrt[3]{6} + \tfrac{247}{2031}\sqrt[3]{36}\right)$$

(b) *Determine el valor de los números racionales P, Q y R tales que*

$$\left(P + Q\sqrt[3]{6} + R\sqrt[3]{36}\right)\left(-3 + 7\sqrt[3]{6}\right) = 2031.$$

Interprete su resultado como un cociente, es decir, expréselo como una división entre números.

(c) *Determine los enteros positivos m y n tales que*

$$\left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} - 1\right)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}.$$

Expresese su resultado como una raíz cuadrada.

Solución. En el inciso (a), para evitar trabajar con fracciones, notemos que 2031 es el común denominador del segundo factor:

$$\tfrac{927}{677} + \tfrac{1486}{677}\sqrt[3]{6} + \tfrac{247}{2031}\sqrt[3]{36} = \tfrac{1}{2031}\left(2781 + 4458\sqrt[3]{6} + 247\sqrt[3]{36}\right)$$

Considere además las siguientes relaciones:

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{36} \qquad y \qquad \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = 6$$

Desarrollando y agrupando términos semejantes, obtenemos

$$\begin{gathered}
\left(-3+7\sqrt[3]{6}\right)\left(\tfrac{927}{677}+\tfrac{1486}{677}\sqrt[3]{6}+\tfrac{247}{2031}\sqrt[3]{36}\right)\\
\tfrac{1}{2031}\left(-3+7\sqrt[3]{6}\right)\left(2781+4458\sqrt[3]{6}+247\sqrt[3]{36}\right)\\
\tfrac{1}{2031}\left((-3\times 2781+7\times 247\times 6)+(-3\times 4458+7\times 2781)\sqrt[3]{6}+(-3\times 247+7\times 4458)\sqrt[3]{36}\right),\\
\tfrac{1}{2031}\left(2031+6093\sqrt[3]{6}+30465\sqrt[3]{36}\right),\\
\mathbf{1+3\sqrt[3]{6}+15\sqrt[3]{36}}.
\end{gathered}$$

Para el inciso (b), empecemos por efectuar la multiplicación del lado izquierdo, tomando nuevamente en cuenta que $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{36}$ y $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}=6$:

$$\left(P+Q\sqrt[3]{6}+R\sqrt[3]{36}\right)\left(-3+7\sqrt[3]{6}\right)=(-3P+42R)+(7P-3Q)\sqrt[3]{6}+(7Q-3R)\sqrt[3]{36}$$

Puesto que buscamos que el resultado sea igual a 2031, buscaremos hacer que los coeficientes de las raíces cúbicas sean cero y que el primer término sea 2031, lo que se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones[3]:

$$\begin{aligned}
-3P+42R&=2031,\\
7P-3Q&=0,\\
7Q-3R&=0
\end{aligned}$$

Este es un *sistema lineal* 3×3, el cual puede resolverse de muchas maneras. Aquí lo haremos por el método de *suma y resta*. La primera ecuación puede dividirse entre 3 para obtener $-P+14R=677$. Ahora, multiplicamos la segunda ecuación por 7, la tercera por 3 y sumamos, para así obtener otra ecuación sólo con P y R:

$$\begin{array}{r}
49P-21Q=0,\\
\underline{21Q-9R=0}\\
49P-9R=0
\end{array}$$

Sumando esta ecuación con 49 veces $-P+14R=677$ (anteriormente obtenida),

[3] Para fines de este problema, es *suficiente* que se cumpla el sistema de ecuaciones presentado, pero de hecho es también *necesario* debido a que la manera de expresar estos números en la forma $a+b\sqrt[3]{6}+c\sqrt[3]{36}$ es única. Esto último es consecuencia de que el polinomio x^3-6 es *irreducible* sobre los números racionales.

podemos hallar el valor de R:

$$\begin{array}{r} 49P - 9R = 0 \\ -49P + 686R = 677 \times 49 \\ \hline 677R = 677 \times 49 \\ \boldsymbol{R = 49} \end{array}$$

Finalmente, podemos obtener los valores de P y Q sustituyendo en la primera y tercera ecuaciones del sistema original:

$$\begin{array}{rr} -3P + 42R = 2031 & 7Q - 3R = 0 \\ -3P + 42(49) = 2031 & 7Q - 3(49) = 0 \\ -3P = -27 & 7Q = 147 \\ \boldsymbol{P = 9} & \boldsymbol{Q = 21} \end{array}$$

En conclusión, hemos obtenido que

$$P + Q\sqrt[3]{6} + R\sqrt[3]{36} = 9 + 21\sqrt[3]{6} + 49\sqrt[3]{36},$$

es decir, el número $9 + 21\sqrt[3]{6} + 49\sqrt[3]{36}$ es el que multiplicado por $-3 + 7\sqrt[3]{6}$ da como resultado 2031. Esto puede reescribirse como una división:

$$\boldsymbol{\frac{2031}{-3 + 7\sqrt[3]{6}} = 9 + 21\sqrt[3]{6} + 49\sqrt[3]{36}}.$$

Finalmente, notemos que a lo largo de este problema hemos visto que las operaciones básicas de multiplicación y división entre números de la forma $a + b\sqrt[3]{6} + c\sqrt[3]{36}$ resultan en números de la misma forma. Esencialmente, el inciso (c) consiste en calcular la raíz cuadrada de $49 + 20\sqrt[3]{6}$, que es también de esa forma, por lo que es de esperar que su raíz cuadrada también lo sea[4], es decir, que existan números racionales x, y y z tales que

$$(x + y\sqrt[3]{6} + z\sqrt[3]{36})^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}.$$

Más aún, el inciso nos pide determinar números enteros positivos m y n tales que

$$(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} - 1)^2 = 40 + 20\sqrt[3]{6},$$

[4]Sin embargo, aunque la raíz cuadrada de $49 + 20\sqrt[3]{6}$ es de esa forma, esto no siempre es así. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 no es un número de la forma anterior.

de manera que si comparamos los términos que aparecen dentro de los cuadrados del lado izquierdo en ambas ecuaciones podemos esperar que

$$x = -1, \qquad \sqrt[3]{m} = y\sqrt[3]{6} \qquad y \qquad \sqrt[3]{n} = z\sqrt[3]{36},$$

de donde se sigue $\boldsymbol{m = 6y^3}$ y $\boldsymbol{n = 36z^3}$. Procedamos entonces a resolver la ecuación para y y z (pues el problema nos anuncia que es $x = -1$).

Vamos a desarrollar $(-1 + y\sqrt[3]{6} + z\sqrt[3]{36})^2$ tomando en cuenta que $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = 6$ y $\sqrt[3]{36} \times \sqrt[3]{36} = 6\sqrt[3]{6}$:[5]

$$(-1 + y\sqrt[3]{6} + z\sqrt[3]{36})^2 = (1 + 12yz) + (-2y + 6z^2)\sqrt[3]{6} + (y^2 - 2z)\sqrt[3]{36}$$

Puesto que buscamos obtener $49 + 20\sqrt[3]{6}$, el sistema de ecuaciones para y y z es

$$1 + 12yz = 49, \qquad -2y + 6z^2 = 20, \qquad y^2 - 2z = 0.$$

La primera ecuación se simplifica a $yz = 4$, por lo que si multiplicamos por y a la tercera ecuación obtenemos

$$0 = y(y^2 - 2z) = y^3 - 2yz = y^3 - 8,$$

que implica $\boldsymbol{y = 2}$. Por ser $yz = 4$, se sigue que es $\boldsymbol{z = 2}$. Claramente, se tiene que $y = 2$ y $z = 2$ satisfacen las ecuaciones anteriores, por lo que, efectivamente, el número

$$-1 + 2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{36}$$

es la raíz cuadrada de $49 + 20\sqrt[3]{6}$. Por último, si metemos los coeficientes a las raíces cúbicas, dicha raíz cuadrada se reescribe como

$$-1 + 2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{36} = -1 + \sqrt[3]{2^3 \times 6} + \sqrt[3]{2^3 \times 36} = -1 + \sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{288},$$

de donde se sigue que es $\boldsymbol{m = 48}$ y $\boldsymbol{n = 288}$. ■

Comentario: El inciso (c) apareció en la Olimpiada Matemática Británica de 1999.

[5] Tome también en cuenta cómo se calcula el cuadrado de un trinomio: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

Problema 9 (5 puntos)**.** *Sobre un terreno plano se lleva a cabo una competencia de Tiro Deportivo, en el cual se ubica una persona disparando a un blanco. Uno de los jueces desea ubicarse en un punto del terreno de forma tal que el sonido del disparo llegue a sus oídos al mismo tiempo que el sonido del impacto de la bala en el blanco. Considerando que el sonido viaja a una velocidad de* $320\ \mathrm{m/s}$ *y que la bala tarda* 0.625 *segundos en llegar al blanco, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos del terreno en los que el juez puede estar ubicado?*

Solución. De acuerdo al problema, el sonido del impacto de la bala en el blanco empieza a viajar $0.625\ \mathrm{s}$ después que el sonido del disparo. Si t_1 y t_2 son los respectivos tiempos que tardan en llegar a los oídos del juez el sonido del impacto de la bala en el blanco y el sonido del disparo, entonces la condición del problema nos dice que

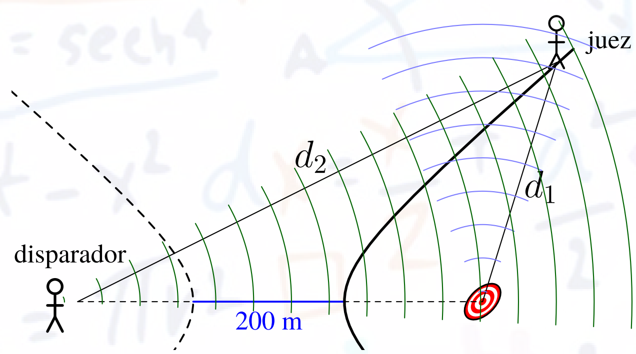
$$0.625\ \mathrm{s} + t_1 = t_2.$$

Sea $v = 320\ \mathrm{m/s}$ la velocidad del sonido y sean d_1 y d_2 las respectivas distancias del observador al punto de disparo y al blanco. Puesto que la velocidad es distancia entre tiempo, se tiene que $d_2 = vt_2$ y $d_1 = vt_1$. Observe entonces que

$$d_2 - d_1 = vt_2 - vt_1 = v(t_2 - t_1) = (320\ \mathrm{m/s})(0.625\ \mathrm{s}) = 200\ \mathrm{m},$$

lo cual se traduce en que el observador debe ubicarse de tal manera que su distancia al punto de disparo sea $200\ \mathrm{m}$ más que su distancia al blanco.

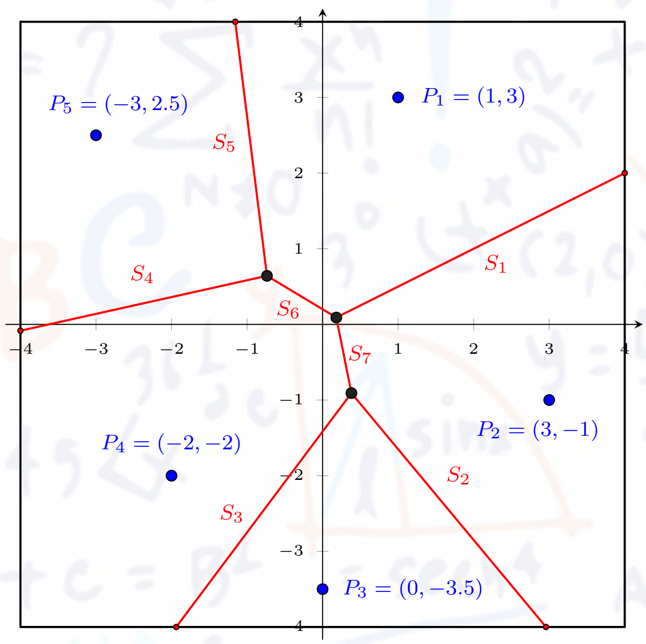
Geométricamente, esto nos dice que los puntos en los que el observador puede estar ubicado son parte de una *hipérbola*,[6] cuyos focos son el punto de disparo y el blanco, y cuyos vertices están a $200\ \mathrm{m}$ de distancia. En una de sus ramas, los puntos que están $200\ \mathrm{m}$ más cerca del punto de disparo que del blanco, mientras que en la otra están $200\ \mathrm{m}$ más cerca del blanco que del punto de disparo. Luego, es en los puntos de ésta última rama en la que el juez debe estar ubicado. ■



[6] Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. A los dos puntos fijos se les llama *focos*, y los vértices de la hipérbola son los puntos de ésta que pertenecen a la recta de los focos.

Problema 10 (4 puntos)**.** *Cierto bachillerato despejó completamente su campo deportivo y fijó en él cinco puntos de reunión para el Simulacro de Sismo Nacional 2023. A partir de ellos el campo se divió en cinco regiones de tal manera que* “el punto de reunión más cercano es el que se encuentra dentro de la correspondiente región”.

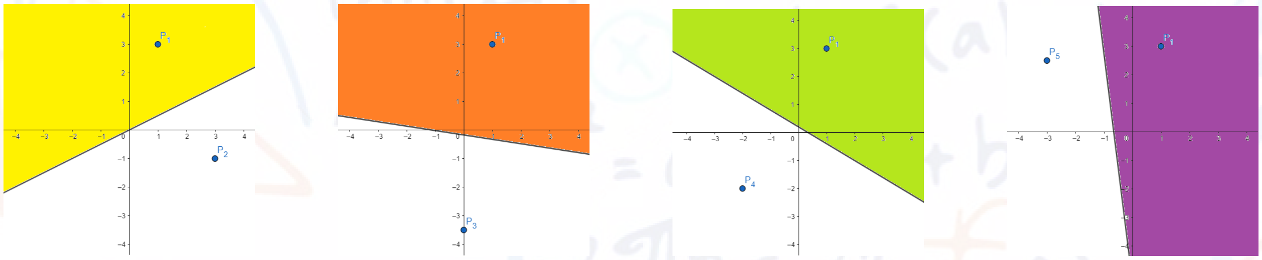
Para cuestiones de análisis, se plasmó el campo deportivo (de dimensiones $80\text{m} \times 80\text{m}$*) en un plano cartesiano a escala* $1:10\text{m}$*, con origen el centro del campo, como se muestra en la figura a seguir. Los cinco puntos de reunión* $P_1, \ldots, P_5$ *se muestran con sus respectivas coordenadas (en azul) y las cinco regiones están delimitadas por siete segmentos* $S_1, \ldots, S_7$ *(en rojo):*



En el campo deportivo, cada segmento de recta $S_1, \ldots, S_7$ *se debe marcar con una línea de cal. Si para marcar un metro en línea recta se necesita medio kilogramo de cal, ¿cuántos kilogramos de cal se requieren para marcar todos los segmentos que delimitan las regiones del campo?*

Nota: *Tanto en sus resultados intermedios como en su respuesta final, utilice al menos cinco cifras decimales de exactitud después del punto decimal (de ser necesario).*

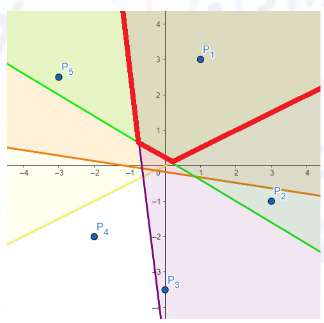
Solución. Una manera de construir las regiones con la propiedad mencionada en el problema es la siguiente: fijemos, por ejemplo, el punto P_1. Luego, tracemos las mediatrices de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}$ y $\overline{P_1P_5}$, tal como se ilustra a continuación:



(a) $\overline{P_1P_2}$ (b) $\overline{P_1P_3}$ (c) $\overline{P_1P_4}$ (d) $\overline{P_1P_5}$

Figura 1: Mediatrices de los segmentos $\overline{P_1P_i}$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

Ahora, notemos que la mediatriz del segmento $\overline{P_1P_2}$ divide al plano en dos regiones, de las cuales, la que contiene a P_1 (región amarilla) consiste de todos los puntos en el plano más cercanos a P_1 y no a P_2 (por definición de mediatriz). De la misma manera, la región naranja consiste de todos los puntos en el plano más cercanos a P_1 y no a P_3, la región verde de los más cercanos a P_1 y no a P_4 y la región morada de los más cercanos a P_1 y no a P_5. Por lo tanto, *la intersección de todas las regiones anteriores* da lugar a la región del plano que consiste de todos los puntos más cercanos a P_1 y no a P_2, P_3, P_4 ni a P_5:



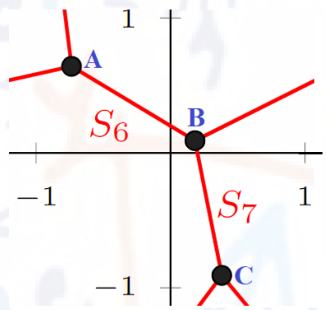
Así, fijando cada uno de los (otros) puntos P_2, P_3, P_4 y P_5 y repitiendo el procedimiento anterior se construyen las cinco regiones que dividen al campo deportivo con la propiedad deseada. Aún más, por construcción, los segmentos que delimitan a las regiones pertenecen a las siguientes mediatrices:

S_1 a la mediatriz de $\overline{P_1P_2}$, S_2 a la mediatriz de $\overline{P_2P_3}$,
S_3 a la mediatriz de $\overline{P_3P_4}$, S_4 a la mediatriz de $\overline{P_4P_5}$,
S_5 a la mediatriz de $\overline{P_1P_5}$, S_6 a la mediatriz de $\overline{P_1P_4}$,
S_7 a la mediatriz de $\overline{P_2P_4}$.

Ahora, tomando en cuenta que el campo deportivo se ha plasmado en un plano cartesiano, para determinar los kilogramos de cal podemos usar la siguiente estrategia:

(I) Calcular las ecuaciones pendiente-ordenada al origen de las siete mediatrices mencionadas anteriormente.

(II) Calcular las coordenadas de los siguientes tres puntos de intersección, A, B y C,



(III) Calcular las longitudes de los segmentos $S_1, \ldots, S_7$.

Inciso (I). Recordemos que la mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio. Tomando en cuenta esta definición, consideremos, por ejemplo, el segmento $\overline{P_1P_2}$. Primero, utilizando fórmulas usuales, podemos verificar que su punto medio tiene coordenadas $(2, 1)$ y que la pendiente de la recta a la que este segmento pertenece es igual a -2. Luego, la ecuación pendiente-ordenada de la recta perpendicular a $\overline{P_1P_2}$ y que pasa por $(2, 1)$ se puede calcular como

$$y - 1 = -\frac{1}{(-2)}(x - 2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x$$

En resumen, repitiendo el procedimiento anterior, si denotamos por y_i la recta (mediatriz) a la que pertenece el segmento S_i, con $i = 1, \ldots, 7$; tenemos que las correspondientes ecuaciones pendiente-ordenada son

$$y_1 = \frac{1}{2}x, \qquad y_2 = -\frac{6}{5}x - \frac{9}{20}, \qquad y_3 = \frac{4}{3}x - \frac{17}{12}, \qquad y_4 = \frac{2}{9}x + \frac{29}{36},$$

$$y_5 = -8x - \frac{21}{4}, \qquad y_6 = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}, \qquad y_7 = -5x + 1$$

Inciso (II). El punto A se puede pensar como la intersección de las rectas y_5 e y_6, el punto B como la intersección de y_1 e y_6, el punto C como la intersección de y_2 e y_7. Entonces, por cálculo directo, se tiene que

$$A = \left(-\frac{109}{148}, \frac{95}{148}\right), \quad B = \left(\frac{2}{11}, \frac{1}{11}\right) \quad \text{y} \quad C = \left(\frac{29}{76}, -\frac{69}{76}\right)$$

Inciso (III). Recordemos que calcular la longitud ($long$) de los segmentos $S_1, \ldots, S_7$ es equivalente a calcular la distancia ($dist$) entre los puntos extremos de los correspondientes segmentos. Utilizando los datos obtenidos en los incisos (I) y (II), tenemos que:

$$long(S_1) = dist[B, (4, y_1(4))] = dist[B, (4, 2)] = \frac{21\sqrt{5}}{11} \approx 4.26885$$

$$long(S_2) = dist[C, (y_2^{-1}(-4), -4)] = dist[C, (\tfrac{71}{24}, -4)] = \frac{235\sqrt{61}}{456} \approx 4.02501$$

$$long(S_3) = dist[C, (y_3^{-1}(-4), -4)] = dist[C, (-\tfrac{31}{16}, -4)] = \frac{1175}{304} \approx 3.86513$$

$$long(S_4) = dist[A, (-4, y_4(-4))] = dist[A, (-4, -\tfrac{1}{12})] = \frac{161\sqrt{85}}{444} \approx 3.34312$$

$$long(S_5) = dist[A, (y_5^{-1}(4), 4)] = dist[A, (-\tfrac{37}{32}, 4)] = \frac{497\sqrt{65}}{1184} \approx 3.38424$$

$$long(S_6) = dist[A, B] = \frac{299\sqrt{34}}{1628} \approx 1.07091$$

$$long(S_7) = dist[B, C] = \frac{167\sqrt{26}}{836} \approx 1.01858$$

Así, la suma de las longitudes de los segmentos $S_1, \ldots, S_7$ es aproximadamente 20.97587. Tomando en cuenta la escala, aproximadamente 209.7587 metros. Por lo tanto, se necesitan aproximadamente 104.8793 kilogramos de cal. Es decir, prácticamente ciento cinco kilogramos de cal. ■

Comentario: Queremos comentar que la división "especial" del campo deportivo que planetea el problema, es un caso particular de lo que se conoce como Diagrama de Voronoi.

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx