GOBIERNO DE SONORA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# Competencia de Matemáticas por Equipos 2023

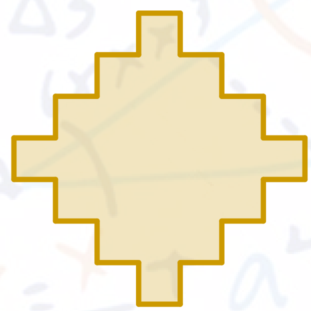
## Nivel Medio Superior

# Tercer Listado de Problemas

**Instrucciones:**

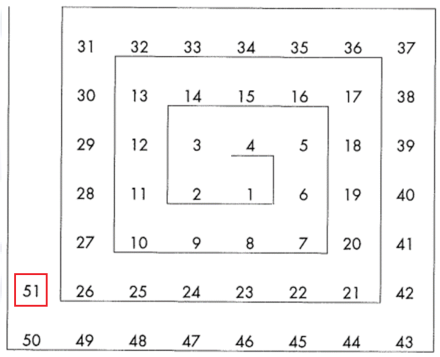
- Se deben enviar las respuestas de los problemas junto con sus respectivos procedimientos/justificaciones.
- Se aceptan procedimientos/justificaciones y respuestas parciales a los problemas.
- La hora y fecha límite de envío es hasta las 23:59 horas (tiempo de Sonora) del 31 de octubre de 2023.
- Para mayor información sobre el envío de respuestas y procedimientos en el sistema del concurso, ver *Manual*.

**Problema 1** (3 puntos)**.** *La señora Ana García es propietaria de un terreno con bardas de igual longitud que forman ángulos rectos, como se muestra en la figura. El terreno posee la propiedad de que* "su perímetro en $\mathrm{km}$ y su área en $\mathrm{km}^2$ están representadas por el mismo número"*. ¿Qué curioso, verdad? Determine, en metros, el perímetro del terreno.*



**Problema 2** (3 puntos)**.** *Cierto bachillerato admite en cada ciclo escolar como mínimo 300 y como máximo 500 alumnos. Para el Simulacro de Sismo Nacional 2023 se decidió formar grupos de un mismo tamaño con el total de alumnos inscritos. Al proponer formar 7 equipos sobraban 4 alumnos, al formar 6 sobraban 3 y al formar 5 sobraban 2. ¿Cuál es el total de alumnos inscritos? ¿Cuántos equipos, y de qué tamaño, se pueden formar sin que sobren alumnos?*

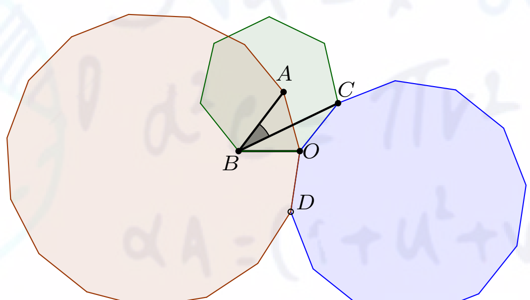
**Problema 3** (3 puntos)**.** *En cierta región del país, se descubrieron unas grutas que encierran un fascinante espectáculo natural. Para cuidarlo, y al mismo tiempo recibir visitantes, sólo se permite el acceso por un agujero que la gruta posee en la parte superior, a ras de suelo. Ante el gran número de visitantes, se dispuso una fila como se muestra en la figura:*




*Visto desde arriba, la entrada a la gruta se ubica en el número* $1$ *y las personas se forman desde el* $2$ *en adelante.*

*En una ocasión, Karla, Fernando, Lucía y Martín fueron a visitar la gruta, pero no llegaron juntos. De hecho, cuando Karla llegó a la entrada, es decir, al número* $1$*, Fernando iba en el lugar* $51$*, Lucía en el* $84$ *y Martín en el* $3658$*. Observemos que, por estar en el lugar* $51$*, Fernando está en la cuarta columna hacia la izquierda y segundo renglón hacia abajo desde la entrada de la gruta. ¿En qué renglón y columna se ubica Lucía? ¿Y Martín?*

**Problema 4** (4 puntos)**.** *En la figura, se tienen un heptágono, un dodecágono y un pentadecágono, todos regulares. Determine la medida del ángulo* $\angle ABC$*.*

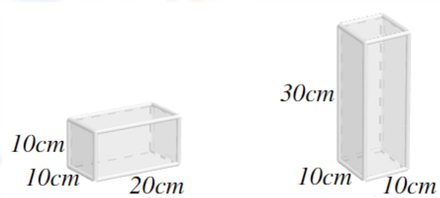


**Problema 5** (5 puntos). *Al expresar un número natural $n$ como un producto $n = ab$, uno de los factores es menor igual que $\sqrt{n}$ y el otro es mayor o igual, es decir, $a \leqslant \sqrt{n} \leqslant b$. Basada en esto, Sofía implementó el siguiente algoritmo para hallar todos los divisores de $n$: comenzando en $k = 1$, se verifica si $k$ divide a $n$. Si sí, se registran $k$ y $n/k$ como divisores de $n$ y se pasa al siguiente número; si no, simplemente se pasa al siguiente número. Este proceso se repite mientras $k \leqslant \sqrt{n}$, tras lo cual el algoritmo finaliza.*

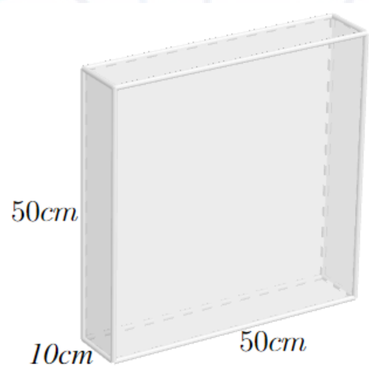
*A la computadora de Sofía, cada paso le toma una milésima de segundo. Por ejemplo, en 5 milésimas de segundo obtiene los divisores de $n = 33$, ya que sólo debe verificar si $k = 1, 2, 3, 4$ y 5 dividen a 33, pues es $5 \leqslant \sqrt{33} \approx 5.74456$*

*Si Sofía pone a su computadora a obtener los divisores de cada número desde 1 hasta 2023, uno tras otro y sin parar, ¿cuántos segundos le tomará obtenerlos?*

**Problema 6** (4 puntos). *En un comercio se requiere almacenar dos tipos de estuches rectangulares que contienen perfumes. Como se ilustra en la figura, un tipo de estuche tiene dimensiones (largo×ancho×alto) $20\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$ y el otro tipo $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 30\text{cm}$:*



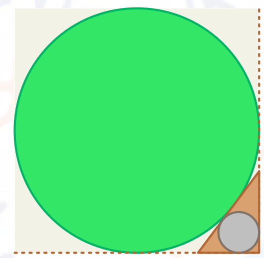

*Los estuches se deben almacenar exactamente en las posiciones mostradas arriba para evitar derrames. Para este propósito, la dueña piensa comprar cajas de madera de dimensiones $50\text{cm} \times 10\text{cm} \times 50\text{cm}$:*




*Los trabajadores advierten que no será posible almancenar los perfumes en las cajas de madera sin que sobre espacio. La dueña afirma que sí. ¿Quién tiene razón?*

**Problema 7** (5 puntos)**.** *La* sucesión de Fibonacci *se usa en profesiones como arquitectura y diseño gráfico para crear diseños estéticos. Dicha sucesión recursiva* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *se define por*

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$



*Un arquitecto diseñó la recepción y jardín de un hotel, como se muestra en la figura: la recepción es triangular (café), y dentro de ésta, el área de los recepcionistas es un círculo (gris) tangente a los tres lados del triángulo. Por su parte, el jardín circular (verde) es tangente a un lado del triángulo y a la prolongación de los otros dos lados.*

*Para crear su diseño, el arquitecto eligió cuatro números consecutivos de la sucesión de Fibonacci* $f_n$, $f_{n+1}$, $f_{n+2}$ *y* $f_{n+3}$ *y, con ellos, fijó las longitudes (*$a$*,* $b$ *y* $c$*) de los lados del triángulo que forma la recepción del hotel como sigue:*

$$a = f_n \cdot f_{n+3}, \qquad b = 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \qquad \text{y} \qquad c = f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1} \cdot f_{n+3}$$

*(a) Demuestre que, con estas dimensiones, el triángulo que forma la recepción es un triángulo rectángulo.*

*(b) Al presentar el proyecto, el arquitecto afirmó que el área de los recepcionistas tiene radio* $r = f_n \cdot f_{n+1}$*. ¿Es correcta dicha afirmación?*

*(c) Los revisores del proyecto preguntaron al arquitecto si el radio del jardín también es el producto de dos números en la sucesión de Fibonacci. Después de efectuar algunos cálculos, el arquitecto obtuvo la respuesta y la comunicó a los revisores. ¿Qué respondió el arquitecto?*

**Problema 8** (4 puntos). *En este problema:*

- *Exprese los coeficientes como enteros o fracciones, según sea el caso.*
- *No utilice aproximaciones decimales para expresar sus respuestas.*

*Considere el conjunto de los números reales que son de la forma*

$$A + B\sqrt[3]{6} + C\sqrt[3]{36},$$

*donde $A$, $B$ y $C$ son números racionales (enteros o fracciones). Estos números, al sumar, restar, multiplicar o dividirse entre sí, resultan en números de esa misma forma:*

*(a)* *Efectúe y simplifique la siguiente multiplicación para obtener un número de la forma presentada arriba:*

$$\left(-3 + 7\sqrt[3]{6}\right)\left(\tfrac{927}{677} + \tfrac{1486}{677}\sqrt[3]{6} + \tfrac{247}{2031}\sqrt[3]{36}\right)$$

*(b)* *Determine el valor de los números racionales $P$, $Q$ y $R$ tales que*

$$\left(P + Q\sqrt[3]{6} + R\sqrt[3]{36}\right)\left(-3 + 7\sqrt[3]{6}\right) = 2031.$$

*Interprete su resultado como un cociente, es decir, expréselo como una división entre números.*

*(c)* *Determine los enteros positivos $m$ y $n$ tales que*

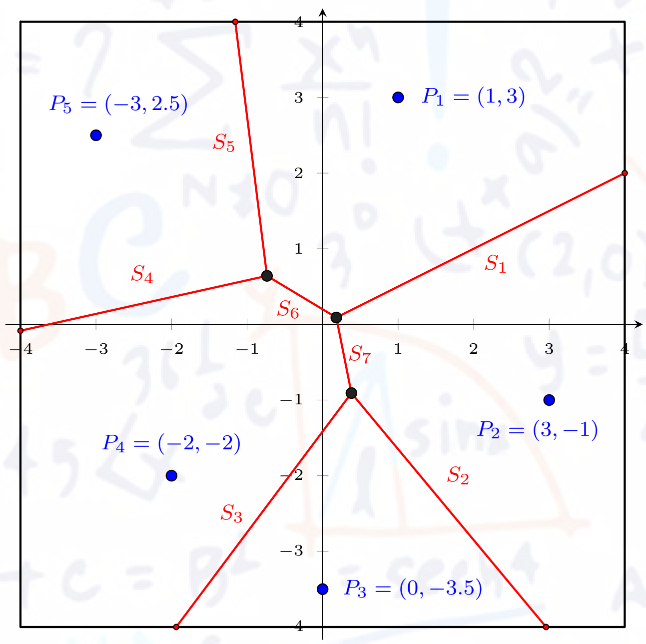
$$\left(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} - 1\right)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}.$$

*Exprese su resultado como una raíz cuadrada.*

**Problema 9** (5 puntos). *Sobre un terreno plano se lleva a cabo una competencia de Tiro Deportivo, en el cual se ubica una persona disparando a un blanco. Uno de los jueces desea ubicarse en un punto del terreno de forma tal que el sonido del disparo llegue a sus oídos al mismo tiempo que el sonido del impacto de la bala en el blanco. Considerando que el sonido viaja a una velocidad de $320\ \mathrm{m/s}$ y que la bala tarda $0.625$ segundos en llegar al blanco, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos del terreno en los que el juez puede estar ubicado?*

**Problema 10** (4 puntos). *Cierto bachillerato despejó completamente su campo deportivo y fijó en él cinco puntos de reunión para el Simulacro de Sismo Nacional 2023. A partir de ellos el campo se divió en cinco regiones de tal manera que* "el punto de reunión más cercano es el que se encuentra dentro de la correspondiente región".

*Para cuestiones de análisis, se plasmó el campo deportivo (de dimensiones* $80\text{m} \times 80\text{m}$*) en un plano cartesiano a escala* $1 : 10\text{m}$, *con origen el centro del campo, como se muestra en la figura a seguir. Los cinco puntos de reunión* $P_1, \ldots, P_5$ *se muestran con sus respectivas coordenadas (en azul) y las cinco regiones están delimitadas por siete segmentos* $S_1, \ldots, S_7$ *(en rojo):*




*En el campo deportivo, cada segmento de recta* $S_1, \ldots, S_7$ *se debe marcar con una línea de cal. Si para marcar un metro en línea recta se necesita medio kilogramo de cal, ¿cuántos kilogramos de cal se requieren para marcar todos los segmentos que delimitan las regiones del campo?*

Nota: *Tanto en sus resultados intermedios como en su respuesta final, utilice al menos cinco cifras decimales de exactitud después del punto decimal (de ser necesario).*

*Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx*