GOBIERNO DE SONORA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Competencia de Matemáticas por Equipos 2024

Nivel Medio Superior

Primer Listado de Problemas

Instrucciones:

- Enviar las respuestas de los problemas junto con sus respectivos procedimientos/justificaciones.
- Se aceptan procedimientos/justificaciones y respuestas parciales a los problemas.
- La hora y fecha límite de envío es hasta las 23:59 horas (tiempo de Sonora) del 22 de septiembre de 2024.
- Para mayor información sobre el envío de respuestas y procedimientos en el sistema del concurso, ver *Manual*.

Problema 1 (3 puntos)**.** *Las cabinas de una rueda de la fortuna de un parque de diversiones, están numeradas de forma consecutiva, iniciando con el 1. En el momento cuando la cabina numerada con el 25 alcanza el punto más bajo, el número 8 está en el punto más alto. ¿Cuántas cabinas en total tiene la rueda de la fortuna?*

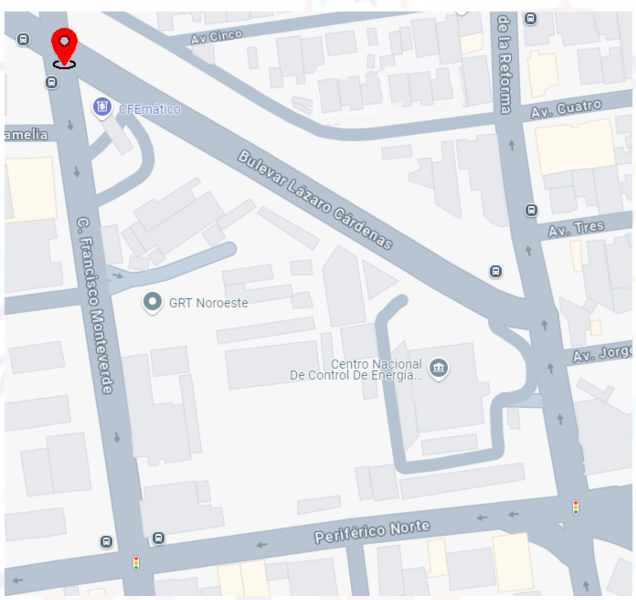
Problema 2 (5 puntos)**.** *Los números enteros del 1 al 100 están escritos en un pizarrón. Adrián elige arbitrariamente dos números enteros distintos del pizarrón, digamos* m *y* n*, y forma la ecuación* $x^2 + mx + n = 0$*. Si la ecuación formada tiene soluciones enteras, entonces borra del pizarrón* m *y* n*; de lo contrario, el pizarrón permanece sin cambios. Si Adrián repite continuamente este proceso, ¿es posible que borre todos los números del pizarrón? Justifiquen su respuesta.*

Problema 3 (4 puntos)**.** *Si x, y y z son números reales que satisfacen el sistema:*

$$x + y + z = 5$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 15$$
$$xy = z^2$$

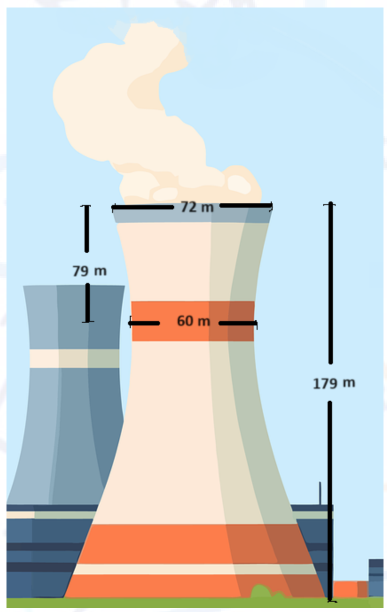
¿Cuál es el valor de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$?

Problema 4 (4 puntos)**.** *Un día de verano, Mayra y Rosalía se encontraban platicando en la intersección de la Calle Francisco Monteverde y el Boulevard Lázaro Cárdenas. Al despedirse, Mayra notó que era muy tarde y decidió trotar por la Calle Francisco Monteverde en dirección al Periférico Norte a una velocidad constante de 5 km/h, con el fin de llegar a tiempo a su casa. Al mismo tiempo, Rosalía caminó por el Boulevard Lázaro Cárdenas en dirección a la calle Reforma a un paso constante de 50 m/min. Mientras Rosalía caminaba, recordó que había olvidado entregarle a Mayra las llaves de su casa, lo que le impediría a Mayra entrar a su domicilio. Por este motivo, decidió llamarla para que regresara al punto desde el que partieron y poder entregárselas. Si se sabe que Mayra respondió a la llamada de Rosalía justo dos minutos después de haberse despedido, y que el ángulo que forman la Calle Francisco Monteverde y el Boulevard Lázaro Cárdenas es exactamente de $50°$, ¿a qué distancia se encontraba Mayra de Rosalía al momento de responder su llamada?*



Problema 5 (3 puntos). *Las formas hiperboloides han resultado ser una solución óptima para la construcción de torres de enfriamiento (estructuras que sirven para reducir la temperatura del agua que se emplea en los procesos de generación de energía). Las dimensiones de una torre de enfriamiento son variadas y van desde pequeñas estructuras que pueden sobrepasar los 220 metros de altura y 100 metros de longitud.*

Supongamos que una torre de enfriamiento de una planta mide 179 metros de altura y que el diámetro en la parte superior es de 72 metros. Por otra parte, que los lados de la torre están separados 60 metros en la parte más estrecha, tal como se muestra en la imagen. Determinen la ecuación de la hipérbola que forma los lados de la torre de enfriamiento.



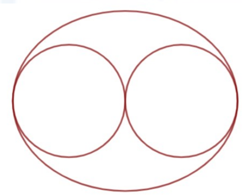
Problema 6 (4 puntos). *Consideren un número θ entre 0 y 90 grados y dibuje un triángulo rectángulo ABC donde el ángulo $\angle BAC$ mida θ grados. Llamen a al lado opuesto a $\angle BAC$ y h a la hipotenusa del triángulo, ¿cuáles de las siguientes relaciones son funciones donde θ es la única variable independiente? Argumenten su respuesta.*

(a) *La relación que a cada ángulo θ le asocia la longitud de la hipotenusa del triángulo ABC.*

(b) *La relación que a cada ángulo θ le asocia la longitud del cateto adyacente a θ en el triángulo ABC.*

(c) *La relación que a cada ángulo θ le asocia el cociente entre la longitud de la hipotenusa del triángulo y la longitud del lado opuesto a θ.*

Problema 7 (5 puntos)**.** *Dos regiones circulares de radio 1 se acomodan de tal forma que se tocan en un solo punto. Se desea encerrar a la región de los círculos con una elipse "lo más pequeña posible" esto es que uno de sus ejes mida 4 y que no toque a los círculos salvo en los dos extremos. ¿Cuánto deberá medir el otro eje de la elipse?*



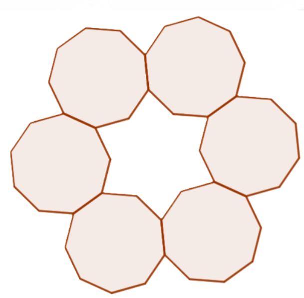
Problema 8 (5 puntos)**.** *Se desea hacer diseños de anillos poligonales formados de m polígonos regulares idénticos de n lados según las siguientes reglas:*

(i) *cada polígono del anillo toca exactamente a otros dos*

(ii) *dos polígonos adyacentes tienen solo una arista en común*

(iii) *el perímetro de la región interna encerrada por el anillo tiene exactamente dos aristas de cada polígono.*

Por ejemplo, en la figura de abajo se muestra un anillo poligonal con $m = 6$ polígonos regulares idénticos de $n = 9$ lados. ¿Para qué polígonos regulares de n lados es posible formar un anillo de este tipo?



Problema 9 (4 puntos)**.** *Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface las siguientes condiciones:*

(1) $f(0) = 0$,

(2) $f(2n) = f(n)$ *y*

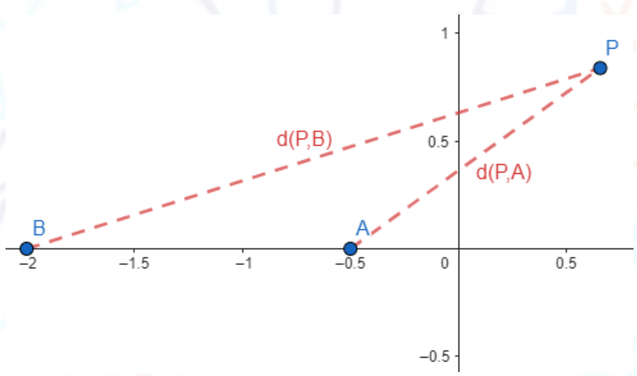
(3) $f(2n+1) = f(n) + 1$.

¿Cuál es el valor de $f(2024)$?

Problema 10 (3 puntos)**.** *Debido a tráfico aéreo e inconvenientes de estacionamiento, un avión recibe la instrucción en su computadora de volar en torno a dos aeropuertos siguiendo la regla de que en todo momento el cociente de su distancia a tales aeropuertos se mantenga constante. Como es usual, bajo cierta escala, este escenario se plasma en un plano cartesiano: sean $A = (-1/2, 0)$ y $B = (-2, 0)$ las posiciones de los dos aeropuertos. El avión, que denotaremos por P, se mueve de tal manera que el cociente de sus distancias a A y B es constante e igual a $1/2$,*

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, utilizando sólo esta información, responda: ¿Qué lugar geométrico describe el movimiento del avión? Deduzca una ecuación, en coordenadas cartesianas (x, y), para tal lugar geométrico. En particular, cuando la posición del avión se encuentra sobre el eje x, ¿cuáles son sus distancias a los aeropuertos?



Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx