Competencia de Matemáticas por Equipos 2024

Nivel Medio Superior

Segundo Listado de Problemas

Instrucciones:

- Se deben enviar las respuestas de los problemas junto con sus respectivos procedimientos/justificaciones.
- Se aceptan procedimientos/justificaciones y respuestas parciales a los problemas.
- La hora y fecha límite de envío es hasta las 23:59 horas (tiempo de Sonora) del 13 de Octubre de 2024.
- Para mayor información sobre el envío de respuestas y procedimientos en el sistema del concurso, ver *Manual*.

Problema 1 (3 puntos). *En una escuela primaria, para practicar la escritura de los números el maestro pide a sus estudiantes que escriban todos los números enteros desde el 1 hasta el 100. Mientras realizaba la actividad orientada por su maestro, Pedro se puso a pensar que a medida que iba escribiendo los números cada vez debía usar más dígitos para representarlos. Por ejemplo, para escribir el número 39 debe escribir dos dígitos: 3 y 9.*

(a) *¿Cuántos dígitos en total debió escribir para completar la tarea asignada por el maestro?*

(b) *Si continuara escribiendo más números, ¿cuál sería el* 2024° *dígito que escribiría? Justifique su respuesta.*

Problema 2 (4 puntos). *Considere un rectángulo* $ABCD$ *y sea* E *un punto sobre el lado* AB *tal que* $\angle CED$ *es un ángulo recto. Sean* P *el pie de la altura desde* A *en el triángulo* ADE *y sea* Q *el pie de la altura desde* B *en el triángulo* BCE*. Demuestre que el segmento* PQ *pasa por el centro del rectángulo* $ABCD$*.*

Problema 3 (4 puntos)**.** *Sean α y β ángulos agudos. Sabiendo que*

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{7} \qquad y \qquad \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

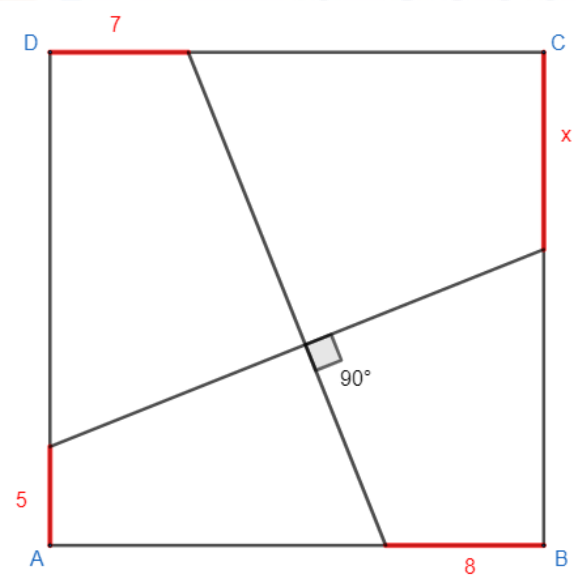
muestre que $\alpha + 2\beta = 45°$.

Problema 4 (5 puntos)**.** *Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple*

$$f(1 + x^3) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2, \qquad a > 0.$$

¿En cuáles números reales la función f alcanza su valor mínimo?

Problema 5 (4 puntos)**.** *Una manzana de terreno, con esquinas $ABCD$, se divide en cuatro lotes utilizando dos segmentos de recta perpendiculares como se muestra en la siguientes figura:*



Bajo cierta escala, en la figura anterior se indican (con rojo) algunos valores de los lados de los lotes. Encuentre el valor del lado x.

Problema 6 (5 puntos)**.** *Sean a, b, c y d números reales tales que*

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} = 1.$$

Encuentre el valor de

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}.$$

Problema 7 (3 puntos)**.** *Considere las sucesiones recursivas (x_n) y (y_n) definidas por $x_1 = 1$, $y_1 = 0$,*

$$x_{n+1}=\frac{5x_n-12y_n}{13} \qquad y \qquad y_{n+1}=\frac{12x_n+5y_n}{13}$$

para cada entero positivo n. Calcule el valor de $x_{2024}^2 + y_{2024}^2$. Justifique su respuesta.

Problema 8 (4 puntos)**.** *Considere un triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$ y sea P un punto sobre el lado BC. El punto E sobre AC y el punto F sobre AB son tales que los ángulos $\angle AEP$ y $\angle AFP$ son ambos rectos. Sean d_1 y d_2 las distancias desde P a los lados AB y AC, es decir, d_1 es la longitud de PF y d_2 es la longitud de PE. Demuestre que la suma $d_1 + d_2$ es la misma para todo punto P sobre BC.*

Problema 9 (5 puntos)**.** *En el plano cartesiano considere los puntos $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$.*

1. *Para el punto $P = (a, b)$, con $b \neq 0$, demuestre que el ángulo $\angle BPC$ cumple que*

   $$\cot(\angle BPC)=\frac{a^2+b^2-1}{2b}.$$

   ¿Cuáles son los puntos P tales que $\angle BPC$ es un ángulo recto?

2. *Considere un punto $A = (x, y)$ sobre la circunferencia de diámetro BC. Sean D el punto sobre BC tal que $\angle ADB = 90°$, $O = (0, 0)$, M el punto medio de AD y G el punto sobre AO tal que $AG = 2GO$. Demuestre que*

   $$\angle BMC + \angle BGC = 270°.$$

Problema 10 (3 puntos)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio de grado n y de coeficientes enteros. Demuestre que para cualesquiera números enteros a y b se tiene que $p(b) - p(a)$ es múltiplo de $b - a$.*

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx