Competencia de Matemáticas por Equipos 2024

Nivel Medio Superior

Soluciones al Primer Listado de Problemas

Problema 1 (3 puntos)**.** *Las cabinas de una rueda de la fortuna de un parque de diversiones, están numeradas de forma consecutiva, iniciando con el 1. En el momento cuando la cabina numerada con el 25 alcanza el punto más bajo, el número 8 está en el punto más alto. ¿Cuántas cabinas en total tiene la rueda de la fortuna?*

Solución. Puesto que entre 8 y 25 se tienen 16 números naturales, sabemos que al recorrer las cabinas entre la 8 y la 25, siguiendo su numeración en orden ascendente, encontraremos un total de 16 cabinas. El total de cabinas en la rueda de la fortuna se obtendrá sumando las 16 cabinas que se tienen haciendo el recorrido de la cabina número 8 a la 25, las 16 cabinas que se tienen recorriendo desde la 25 hasta la 8, más las cabinas número 8 y número 25. Lo anterior da un total de 34 cabinas. ■

Problema 2 (5 puntos)**.** *Los números enteros del 1 al 100 están escritos en un pizarrón. Adrián elige arbitrariamente dos números enteros distintos del pizarrón, digamos m y n, y forma la ecuación $x^2 + mx + n = 0$. Si la ecuación formada tiene soluciones enteras, entonces borra del pizarrón m y n; de lo contrario, el pizarrón permanece sin cambios. Si Adrián repite continuamente este proceso, ¿es posible que borre todos los números del pizarrón? Justifiquen su respuesta.*

Solución. Sí es posible que Adrián lo haga. Para lograrlo se plantea la siguiente propuesta. Observen que considerando n un entero del 1 al 99 y $m = n + 1$, se forma la ecuación $x^2 + (n+1)x + n = 0$ cuya factorización es $(x + n)(x + 1) = 0$ y las soluciones de la ecuación cuadrática: $-1, -n$ (enteros). Así, tomando parejas de números consecutivos, 1 y 2, 3 y 4,..., 99 y 100 sin importar el orden en que lo haga, Adrián consigue borrar todos los números del pizarrón. ■

Problema 3 (4 puntos)**.** *Si x, y y z son números reales que satisfacen el sistema:*

$$x + y + z = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 15$$

$$xy = z^2$$

¿Cuál es el valor de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$?

Solución. Dado que $x + y + z = 5$, tenemos que $(x + y + z)^2 = 25$. Desarrollando el cuadrado del lado izquierdo obtenemos

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

De la segunda ecuación sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 15$, por lo cual se sigue que

$$15 + 2xy + 2xz + 2yz = 25.$$

Por lo anterior, $2(xy + xz + yz) = 10$ y simplificando la expresión obtenemos

$$xy + xz + yz = 5$$

Ahora bien, por la tercera ecuación, podemos sustuir $xy = z^2$ en el lado izquierdo de la ecuación y factorizar z para obtener

$$z(z + x + y) = 5,$$

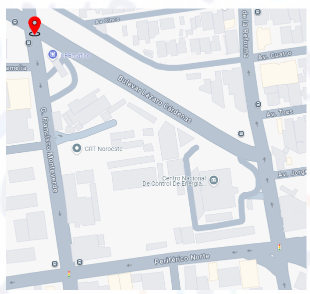
lo cual combinado con la primera ecuación nos permite asegurar que $z = 1$.

Sustituyendo el valor de z en la tercera ecuación se obtiene que $xy = 1$, de donde se obtiene que $x = 1/y$ y $y = 1/x$, con lo cual

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = y + x + z = 5.$$

■

Problema 4 (4 puntos)**.** *Un día de verano, Mayra y Rosalía se encontraban platicando en la intersección de la Calle Francisco Monteverde y el Boulevard Lázaro Cárdenas. Al despedirse, Mayra notó que era muy tarde y decidió trotar por la Calle Francisco Monteverde en dirección al Periférico Norte a una velocidad constante de 5 km/h, con el fin de llegar a tiempo a su casa. Al mismo tiempo, Rosalía caminó por el Boulevard Lázaro Cárdenas en dirección a la calle Reforma a un paso constante de 50 m/min. Mientras Rosalía caminaba, recordó que había olvidado entregarle a Mayra las llaves de su casa, lo que le impediría a Mayra entrar a su domicilio. Por este motivo, decidió llamarla para que regresara al punto desde el que partieron y poder entregárselas. Si se sabe que Mayra respondió a la llamada de Rosalía justo dos minutos después de haberse despedido, y que el ángulo que forman la Calle Francisco Monteverde y el Boulevard Lázaro Cárdenas es exactamente de* $50°$*, ¿a qué distancia se encontraba Mayra de Rosalía al momento de responder su llamada?*



Solución. Para obtener la distancia entre Rosalía y Mayra al momento de responder la llamada, necesitamos saber a qué distancia se encontraba cada una del punto de partida en ese preciso momento. Como Rosalía caminó a $50m/min$, después de dos minutos debió encontrarsea 100 m del punto de partida.

Por otro lado, dado que 2 minutos es $1/30$ horas, sabemos que Mayra se encontraba a $(5)(1/30)km$ del punto de partida al momento de responder, esto es $1/6$ de kilómetro o bien $166.\overline{66}m$.

Con los datos anteriores y sabiendo que el ángulo que forman la Calle Francisco Monteverde y el Boulevard Lázaro Cárdenas es exactamente de $50°$, podemos utilizar la Ley de los Cosenos para obtener la distancia d entre Mayra y Rosalía al momento de responder la llamada:

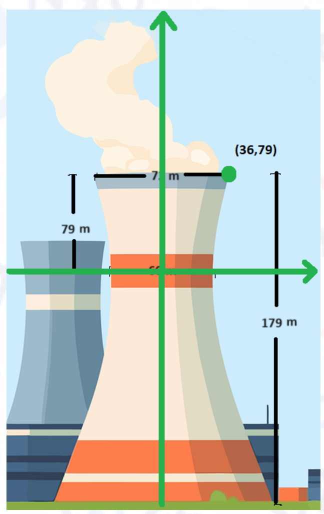
$$d = \sqrt{100^2 + (166.\overline{66})^2 - 2(100)(166.\overline{66})\cos(50°)} \approx 127.87m$$

■

Problema 5 (3 puntos)**.** *Las formas hiperboloides han resultado ser una solución óptima para la construcción de torres de enfriamiento (estructuras que sirven para reducir la temperatura del agua que se emplea en los procesos de generación de energía). Las dimensiones de una torre de enfriamiento son variadas y van desde pequeñas estructuras que pueden sobrepasar los 220 metros de altura y 100 metros de longitud.*

Supongamos que una torre de enfriamiento de una planta mide 179 metros de altura y que el diámetro en la parte superior es de 72 metros. Por otra parte, que los lados de la torre están separados 60 metros en la parte más estrecha, tal como se muestra en la imagen. Determinen la ecuación de la hipérbola que forma los lados de la torre de enfriamiento.

Solución. Consideraremos que el centro de la torre se encuentra en el origen como se muestra en la imagen.



En tal caso, sabemos que la ecuación de la hipérbola buscada tomará la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para encontrar los valores de a^2 y b^2, primero notemos que la longitud del eje transversal de la hipérbola es $2a$ y en este caso, puesto que en la parte más estrecha de la torre los lados de la torre están separados 60 metros, debe pasar que $2a = 60$ y en consecuencia $a = 30$.

Por otro lado, sabemos que el punto $(36, 79)$ está sobre la hipérbola, por lo cual sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma:

$$\frac{36^2}{30^2} - \frac{79^2}{b^2} = 1.$$

Despejando b^2 de la ecuación anterior, obtenemos que

$$b^2 = \frac{79^2}{\frac{36^2}{30^2} - 1} = \frac{156,025}{11}.$$

Por lo anterior, la ecuación buscada es

$$\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{\frac{156,025}{11}} = 1.$$

■

Problema 6 (4 puntos)**.** *Consideren un número θ entre 0 y 90 grados y dibuje un triángulo rectángulo ABC donde el águlo $\angle BAC$ mida θ grados. Llamen a al lado opuesto a $\angle BAC$ y h a la hipotenusa del triángulo, ¿cuáles de las siguientes relaciones son funciones donde θ es la única variable independiente? Argumenten su respuesta.*

(a) *La relación que a cada ángulo θ le asocia la longitud de la hipotenusa del triángulo ABC.*

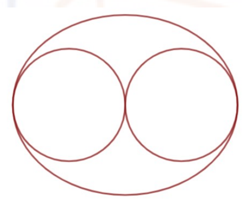
(b) *La relación que a cada ángulo θ le asocia la longitud del cateto adyacente a θ en el triángulo ABC.*

(c) *La relación que a cada ángulo θ le asocia el cociente entre la longitud de la hipotenusa del triángulo y la longitud del lado opuesto a θ.*

Solución. Recordemos que una función es una relación f entre dos conjuntos, V y W tal que a cada elemento en V, f le asigna uno y solo uno de los elementos del conjunto W. Para este problema consideraremos como el conjunto A al intervalo $(0, 90)$ para asegurar la existencia del triángulo ABC y como W podemos considerar al conjunto de los números reales.

Dado un triángulo rectángulo ABC donde el ángulo $\angle BAC$ mida θ grados, siempre es posible construir otro triángulo rectángulo $A'B'C'$ semejante a ABC, por lo cual la hipotenusa y el cateto adyacente a θ no están determinados de forma única por el ángulo θ. Sin embargo, dado que los triángulos $A'B'C'$ y ABC son semejantes, existe una constante α tal que si la hipotenusa y el cateto opuesto a θ en el triángulo $A'B'C'$ son h' y a', entonces $h' = \alpha h$ y $a' = \alpha a$. Por lo cual, el cociente entre la hipotenusa de cualquiera de los triángulos que se pueden construir y la longitud del cateto opuesto a θ en dicho triángulo, siempre será h/a. Por lo anterior, a cada valor de θ le corresponde el número real h/a, independientemente del triángulo que se haya construido. Así, la relación del inciso c) es la única que define una función donde θ es la variable independiente. ■

Problema 7 (5 puntos)**.** *Dos regiones circulares de radio 1 se acomodan de tal forma que se tocan en un solo punto. Se desea encerrar a la región de los círculos con una elipse "lo más pequeña posible" esto es que uno de sus ejes mida 4 y que no toque a los círculos salvo en los dos extremos. ¿Cuánto deberá medir el otro eje de la elipse?*



Solución. Sea $a > 0$ la longitud de la mitad del otro eje de la elipse. Entonces su ecuación es

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

La ecuación del círculo de la derecha es

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Buscamos el valor mínimo de a para el cual las dos ecuaciones tienen una y sólo una solución. Si reemplazamos y en la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1-(x-1)^2}{a^2} = 1$$

equivalente a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{-x^2+2x}{a^2} = 1$$
$$a^2x^2 - 4x^2 + 8x = 4a^2,$$
$$(a^2-4)x^2 + 8x - 4a^2 = 0.$$

Si $a = 2$ se tiene la solución $x = 2$. Si $a \neq 2$ se tienen dos soluciones

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{16(a^2-2)^2}}{2(a^2-4)}.$$

Así, la primera solución es

$$x = \frac{-8 + 4(a^2-2)}{2(a^2-4)} = 2,$$

y la otra solución es

$$x = \frac{-8 - 4(a^2-2)}{2(a^2-4)} = \frac{-2a^2}{a^2-2}.$$

La elipse es tiene la altura más pequeña posible cuando no encontramos otra solución en el intervalo $[0, 2]$ que no sea la solución $x = 2$, ya que en ese caso $y = 0$. Luego reemplazamos $x = 2$ en la ecuación:

$$2 = \frac{-2a^2}{a^2-2},$$

llegando a

$$a^2 = 2,$$

entonces $a = \sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} < 2$, el otro eje de la elipse mide $2\sqrt{2}$.

■

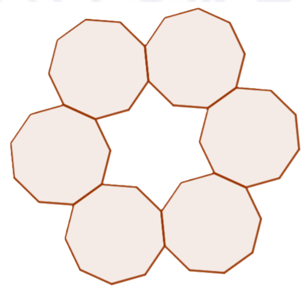
Problema 8 (5 puntos)**.** *Se desea hacer diseños de anillos poligonales formados de m polígonos regulares idénticos de n lados según las siguientes reglas:*

(i) *cada polígono del anillo toca exactamente a otros dos*

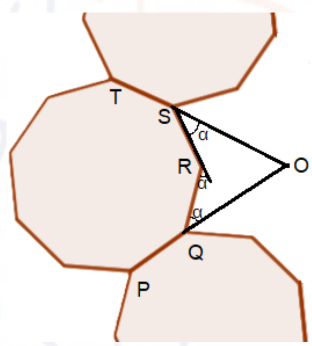
(ii) *dos polígonos adyacentes tienen solo una arista en común*

(iii) *el perímetro de la región interna encerrada por el anillo tiene exactamente dos aristas de cada polígono.*

Por ejemplo, en la figura de abajo se muestra un anillo poligonal con $m = 6$ polígonos regulares idénticos de $n = 9$ lados. ¿Para qué polígonos regulares de n lados es posible formar un anillo de este tipo?



Solución. Sea α el ángulo exterior (en grados) del polígono, de manera que $\alpha = \frac{360}{n}$, y P, Q, R, S y T cinco vértices consecutivos de los polígonos, como se muestra en la figura, donde QRS es parte del perímetro de la región interior. Por simetría, el



punto O donde PQ y TS se intersecan, es el centro del la región interna del anillo, por lo que

$$\angle QOS = \frac{360^\circ}{m}.$$

Luego, la suma de los ángulos en el cuadrilátero $OSRQ$ es 360°, resultando la siguiente relación

$$360 = \frac{360}{n} + \alpha + (180 + \alpha) + \alpha$$

y por lo tanto

$$1 = \frac{2}{m} + \frac{6}{n},$$

equivalente a la ecuación

$$mn = 6m + 2n$$
$$(m-2)(n-6) = 12.$$

Ahora, el anillo existe para $m > 2$, resultando $n - 6$ un factor positivo de 12: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Así las posibilidades para n son 7, 8, 9, 10, 12 y 18. Por lo tanto es posible construir 6 anillos. ■

Problema 9 (4 puntos)**.** *Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface las siguientes condiciones:*

(1) $f(0) = 0$,

(2) $f(2n) = f(n)$ *y*

(3) $f(2n+1) = f(n) + 1$.

¿Cuál es el valor de $f(2024)$?

Solución. Notemos que

$$f(2024) = f(1012) = f(506) = f(253).$$

Como $253 = (126)(2) + 1$ y $126 = (63)(2)$, se sigue que

$$f(253) = f(126) + 1 = f(63) + 1.$$

Puesto que $63 = (31)(2) + 1$ y $31 = (15)(2) + 1$, obtenemos que

$$f(63) + 1 = f(31) + 2 = f(15) + 3.$$

Similarmente, $15 = (7)(2) + 1$ y $f(7) = f(3) + 1 = f(1) + 2 = f(0) + 3 = 3$. Así,

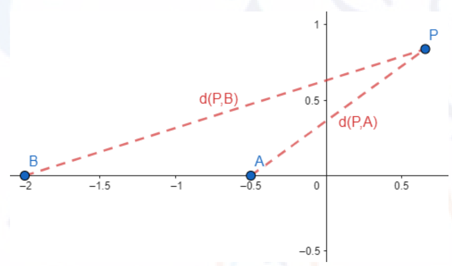
$$f(2024) = f(15) + 3 = f(7) + 4 = 3 + 4 = 7.$$

Otra posible solución se obtiene al observar que la función f asigna a cada natural el número de 1's que hay en su expresión como número binario. Puesto que 2024 en binario es 11111101000, se sigue que $f(2024) = 7$. ■

Problema 10 (3 puntos). *Debido a tráfico aéreo e inconvenientes de estacionamiento, un avión recibe la instrucción en su computadora de volar en torno a dos aeropuertos siguiendo la regla de que en todo momento el cociente de su distancia a tales aeropuertos se mantenga constante. Como es usual, bajo cierta escala, este escenario se plasma en un plano cartesiano: sean* $A = (-1/2, 0)$ *y* $B = (-2, 0)$ *las posiciones de los dos aeropuertos. El avión, que denotaremos por* P*, se mueve de tal manera que el cociente de sus distancias a* A *y* B *es constante e igual a* $1/2$*,*

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, utilizando sólo esta información, responda: ¿Qué lugar geométrico describe el movimiento del avión? Deduzca una ecuación, en coordenadas cartesianas (x, y)*, para tal lugar geométrico. En particular, cuando la posición del avión se encuentra sobre el eje* x*, ¿cuáles son sus distancias a los aeropuertos?*



Solución. Primero, notemos que la condición $d(P, A)/d(P, B) = 1/2$, es equivalente a

$$2d(P, A) = d(P, B).$$

Usando la fórmula usual para calcular la distancia entre dos puntos del plano cartesiano, y sabiendo que la distancia es un número no negativo, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} \\
\iff \quad & 4\left[(x+\tfrac{1}{2})^2 + y^2\right] = (x+2)^2 + y^2 \\
\iff \quad & 4x^2 + 4x + 4y^2 + 1 = x^2 + 4x + y^2 + 4 \\
\iff \quad & x^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

En conclusión, el lugar geométrico que describe el movimiento del avión es un círculo de radio uno centrado en el origen. La correspondiente ecuación es precisamente $x^2 + y^2 = 1$. Así, el avión cruza el eje x en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Por tanto, si se encuentra en el punto $(1, 0)$, entonces su distancia al aerupuerto A es $3/2$ y al aeropuerto B es 3. Si se encuentra en el punto $(-1, 0)$, entonces su distancia al aerupuerto A es $1/2$ y al aeropuerto B es 1.

Nota. Este problema es un caso particular de los llamados círculos de Apolonio. ■

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx