GOBIERNO DE SONORA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Competencia de Matemáticas por Equipos 2024

Nivel Medio Superior

Soluciones al Segundo Listado de Problemas

Problema 1 (3 puntos). *En una escuela primaria, para practicar la escritura de los números el maestro pide a sus estudiantes que escriban todos los números enteros desde el 1 hasta el 100. Mientras realizaba la actividad orientada por su maestro, Pedro se puso a pensar que a medida que iba escribiendo los números cada vez debía usar más dígitos para representarlos. Por ejemplo, para escribir el número 39 debe escribir dos dígitos; 3 y 9.*

(a) ¿Cuántos dígitos en total debió escribir para completar la tarea asignada por el maestro?

(b) Si continuara escribiendo más números, ¿cuál sería el 2024° dígito que escribiría? Justifique su respuesta.

Solución. (a) Para escribir los números del 1 al 9 se necesitan 9 dígitos. Para escribir cada número del 10 al 99 se necesitan dos dígitos por número, es decir

$$((99-10)+1)\times 2 = 180$$

dígitos. Solo falta escribir el número 100, el cual consta de 3 dígitos. Por tanto se utilizan

$$9+180+3=192$$

dígitos para escribir los números del 1 al 100.

(b) Por el inciso (a) necesitamos 189 dígitos para escribir los números del 1 al 99. Nos faltan por escribir

$$2024-189=1835$$

dígitos. Cada número a partir del 100 y hasta el 999 requiere 3 dígitos para escribirse. Al dividir $1835\div 3$ encontramos que

$$1835=(611)(3)+2.$$

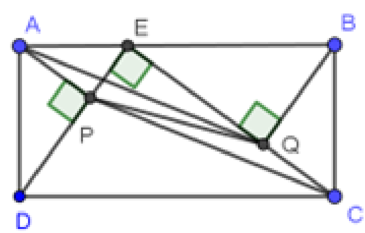
Esto quiere decir que escribiremos 611 números a partir del 100 y el segundo dígito del siguiente número será el dígito buscado. El número de tres dígitos que ocupa la posición 611 a partir del 100 es

$$100 + (611 - 1) = 710.$$

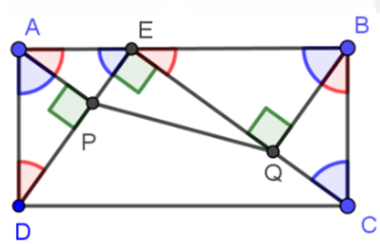
El siguiente número es el 711 y su segundo dígito es 1. Por tanto 1 es el 2024° dígito que escribiremos. ■

Problema 2 (4 puntos)**.** *Considere un rectángulo $ABCD$ y sea E un punto sobre el lado AB tal que $\angle CED$ es un ángulo recto. Sean P el pie de la altura desde A en el triángulo ADE y sea Q el pie de la altura desde B en el triángulo BCE. Demuestre que el segmento PQ pasa por el centro del rectángulo $ABCD$.*

Primera solución. Vamos a probar que el centro del rectángulo $ABCD$ es el punto medio de PQ. Para ello, la idea es probar que el cuadrilátero $APCQ$ es un paralelogramo. De esta manera, tendremos que sus diagonales AC y PQ se cortan en su punto medio. Con ello, el punto medio de PQ será el punto medio de AC, es decir, el centro del rectángulo.



Empecemos por observar que los segmentos AP y QC son paralelos. En efecto, esto se debe a que las rectas AP y CE son perpendiculares a la misma recta EP. Ahora bien, observemos que $\angle PAD = \angle QCB$ ya que están formados por pares de segmentos respectivamente paralelos: $AD \parallel BC$ y $AP \parallel QC$.



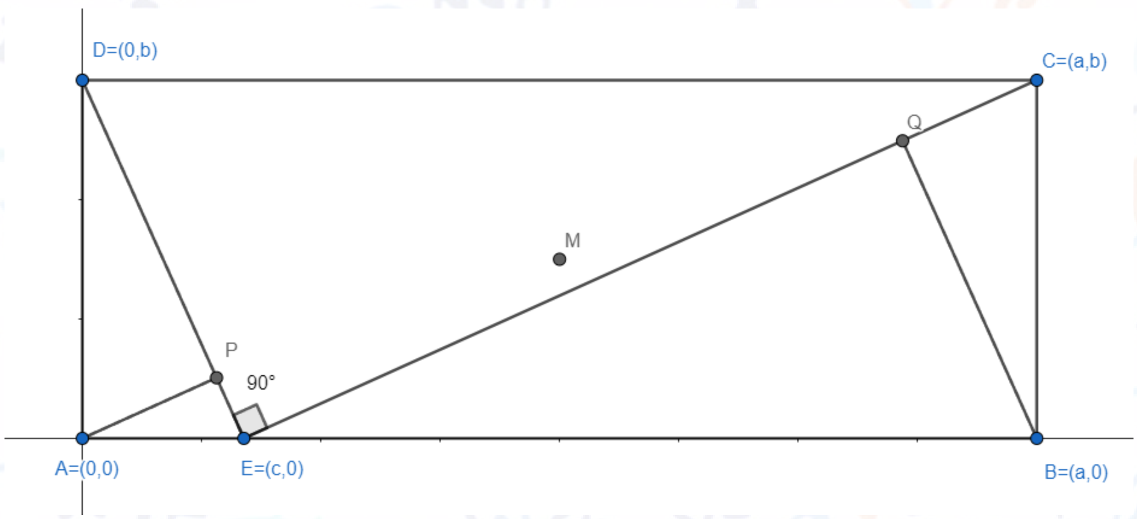
Consecuentemente, tenemos que $\triangle APD$ es congruente con $\triangle CQB$. Primero notemos que son semejantes, lo cual se debe a igualdad $\angle PAD = \angle QCB$ y a que ambos tienen ángulos rectos. Luego, la congruencia se sigue de la igualdad $AD = BC$ entre lados opuestos de un rectángulo.

Finalmente, la congruencia $\triangle APD \cong \triangle CQB$ implica que los segmentos AP y QC son iguales. Así, el que éstos segmentos sean paralelos e iguales implica que el cuadrilátero $APCQ$ es un paralelogramo, lo cual, como explicábamos al inicio, nos dice que el punto medio de PQ es el centro del rectángulo $ABCD$. ■

Segunda solución. Coloquemos el rectángulo $ABCD$ en el plano cartesiano de modo que

$$A = (0,0), \quad B = (a,0), \quad C = (a,b), \quad D = (0,b), \quad E = (c,0),$$

donde $a, b, c > 0$, como se muestra en la figura.



El centro del rectángulo $ABCD$ es el punto

$$M = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

Encontraremos las coordenadas de P y Q y mostraremos que M es el punto medio del segmento PQ, lo cual en particular demuestra que el segmento PQ pasa por M. Primeramente, la condición $DE \perp EC$ se traduce a

$$m_{DE} m_{EC} = -1,$$

donde m_{DE} y m_{EC} son las pendientes de las rectas que contienen a los segmentos DE y EC respectivamente. Pero

$$m_{DE} = \frac{0-b}{c-0} = -\frac{b}{c}, \qquad m_{EC} = \frac{b-0}{a-c} = \frac{b}{a-c}$$

y así obtenemos

$$\left(-\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{a-c}\right) = -1,$$

lo cual implica que $b^2 = c(a-c)$ o $b^2 + c^2 = ac$. Usaremos esta condición en cualquiera de sus formas, repetidas veces en lo que resta de la solución.

El punto P es la intersección de la recta ℓ_{DE} y la recta ℓ_{AP} que contienen a los segmentos DE y AP respectivamente. Por medio de la forma punto - pendiente de la ecuación de la recta podemos escribir las ecuaciones de ambas rectas

$$\begin{aligned} \ell_{DE} : y - b &= -\frac{b}{c}(x-0), \\ y &= -\frac{b}{c}x + b. \end{aligned}$$

Como $\ell_{DE} \perp \ell_{AP}$, sabemos que $m_{DE}m_{AP} = -1$ y así podemos deducir que

$$m_{AP} = \frac{c}{b},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ell_{AP} : y - 0 &= \frac{c}{b}(x-0), \\ y &= \frac{c}{b}x. \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{c}{b}x &= -\frac{b}{c}x + b \\ x &= \frac{b}{\frac{c}{b} + \frac{b}{c}} \\ &= \frac{b^2c}{c^2+b^2} = \frac{b^2c}{ac} = \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de ℓ_{AP}, tenemos

$$y = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b^2}{a}\right) = \frac{bc}{a}.$$

Por tanto

$$P = \left(\frac{b^2}{a}, \frac{bc}{a}\right).$$

Por otro lado, el punto Q es la intersección de la recta ℓ_{EC} y la recta ℓ_{BQ} que contienen a los segmentos EC y BQ respectivamente. Procediendo de manera análoga, escribimos las ecuaciones de ambas rectas

$$\begin{aligned}
\ell_{EC} : y - b &= \frac{b}{a-c}(x-a), \\
y &= \frac{b}{a-c}(x-a) + b. \\
\ell_{BQ} : y - 0 &= \frac{c-a}{b}(x-a), \\
y &= \frac{c-a}{b}(x-a).
\end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{b}(x-a) &= \frac{b}{a-c}(x-a) + b \\
x - a &= \frac{b}{\dfrac{c-a}{b} + \dfrac{b}{c-a}} \\
x &= a + \frac{b^2(c-a)}{(c-a)^2 + b^2} \\
x &= a + \frac{b^2(c-a)}{(c-a)^2 + c(a-c)} \\
x &= a - \frac{b^2(a-c)}{(a-c)^2 + c(a-c)} \\
x &= a - \frac{b^2}{a-c+c} \\
x &= a - \frac{b^2}{a}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de ℓ_{BQ}, tenemos

$$y = \left(\frac{c-a}{b}\right)\left(-\frac{b^2}{a}\right)$$
$$y = \frac{(a-c)b}{a}$$
$$y = b - \frac{bc}{a}.$$

Por tanto

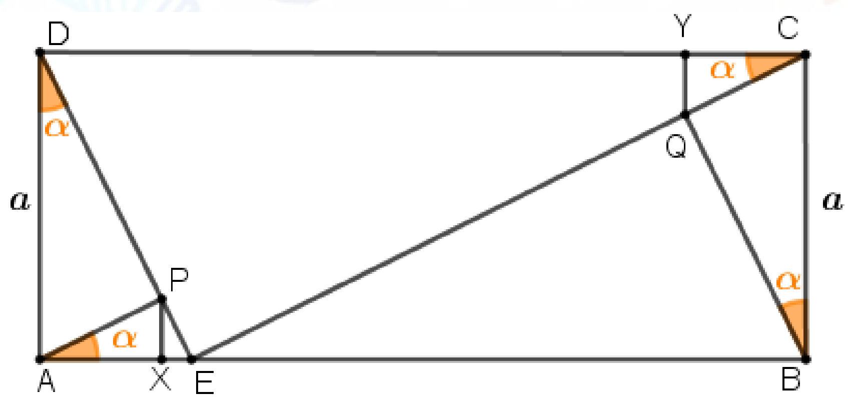
$$Q = \left(a - \frac{b^2}{a}, b - \frac{bc}{a}\right).$$

Finalmente, el punto medio del segmento PQ tiene coordenadas

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} + a - \frac{b^2}{a}, \frac{bc}{a} + b - \frac{bc}{a}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

como queriamos. ■

Tercera solución. Claramente, el centro del rectángulo es punto medio de AC. Para probar que también es punto medio de PQ, vamos a demostrar que los “desplazamientos horizontal y vertical” desde A hasta P son los mismos que desde C hasta Q, pero en sentido contrario. En la figura a seguir, esto se traduce a probar que $AX = CY$ y que $PX = QY$. Primero observemos que DP y BQ son paralelas, pues ambas son perpendiculares a CE. Puesto que AD y BC son paralelas, se sigue que $\angle ADP = \angle CBQ$. También notemos que $\angle PDA = \angle PAX$, ya que ambos suman 90° con $\angle PAD$. Similarmente, es $\angle QCY = \angle QBC$, probando que los cuatro ángulos son iguales, digamos a α.



Llamemos a a la longitud de los lados BC y DA. En el triángulo rectángulo APD, el lado AP es el cateto opuesto a α y su hipotenusa es a, por lo que $AP = a \operatorname{sen} \alpha$. Luego, en el triángulo rectángulo APX, el cateto adyacente a α es AX, el opuesto es PX y la hipotenusa es AP; por tanto, es

$$PX = AP \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad \text{y} \qquad AX = AP \cos \alpha = a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Análogamente, en el triángulo BCQ tenemos que $CQ = a \operatorname{sen} \alpha$ y entonces es

$$QY = CQ \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad \text{y} \qquad CY = CQ \cos \alpha = a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Así, resulta claro que es $AX = CY$ y es $PX = QY$, lo cual nos dice que los desplazamientos horizontal y vertical desde A hasta P son iguales que los desde C hasta Q, pero en sentido contrario. Como A y C son simétricos respecto del centro del rectángulo, concluimos entonces que P y Q también lo son, tal como queríamos probar. ■

Problema 3 (4 puntos). *Sean α y β ángulos agudos. Sabiendo que*

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{7} \qquad y \qquad \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

muestre que $\alpha + 2\beta = 45°$.

Solución. Mostraremos primero que $\tan(\alpha+2\beta) = 1$. Por la fórmula de la tangente para la suma de ángulos sabemos que

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(2\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(2\beta)}.$$

Ahora solo necesitamos encontrar $\tan(2\beta)$ y esto lo podemos lograr a través de la fórmula de la tangente para el doble de un ángulo

$$\tan(2\beta) = \frac{2\tan(\beta)}{1 - \tan^2(\beta)}.$$

Hemos reducido el problema a encontrar $\tan(\beta)$, pero

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

y por la identidad pitagórica $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ y dado que β es agudo se sigue que

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Luego

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{3},$$

de donde

$$\tan(2\beta) = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

De aquí, encontramos que

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 1.$$

Solo resta verificar que $\alpha + 2\beta$ se encuentra también en el primer cuadrante. Como

$$\tan(0^\circ) = 0 < \tan(\alpha) = \frac{1}{7} < 1 = \tan(45^\circ),$$
$$\tan(0^\circ) = 0 < \tan(\beta) = \frac{1}{3} < 1 = \tan(45^\circ),$$

se sigue que $0 < \alpha < 45^\circ$ y $0 < \beta < 45^\circ$, por lo que forsozamente $0 < \alpha + 2\beta < 135^\circ$. Como el único ángulo entre 0° y 135° cuya tangente es 1 es 45°, concluimos que

$$\alpha + 2\beta = 45^\circ.$$

■

Problema 4 (5 puntos). *Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple*

$$f(1 + x^3) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2, \qquad a > 0.$$

¿En cuáles números reales la función f alcanza su valor mínimo?

Solución. Si definimos $g(x) = f(1 + x^3)$, vemos que

$$g(x) = (x^4 - 2ax^2 + a^2) + 2a^2 = (x^2 - a)^2 + 2a^2.$$

Esto nos dice que g alcanza su valor mínimo si $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$.

Por otro lado,

$$f(x) = f(1 + (\sqrt[3]{x - 1})^3) = ((\sqrt[3]{x - 1})^2 - a)^2 + 2a^2.$$

Por tanto f alcanza su mínimo si

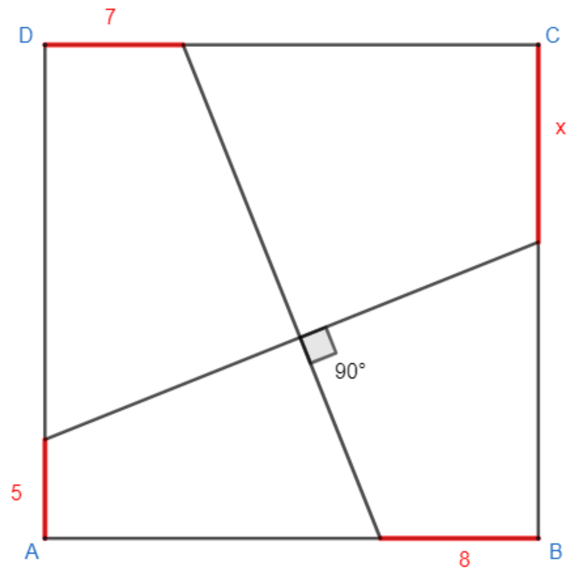
$$\sqrt[3]{x - 1} = \sqrt{a}, \qquad \text{o} \qquad \sqrt[3]{x - 1} = -\sqrt{a},$$

esto es sucede si

$$x = 1 + \sqrt{a^3}, \qquad \text{o} \qquad x = 1 - \sqrt{a^3}.$$

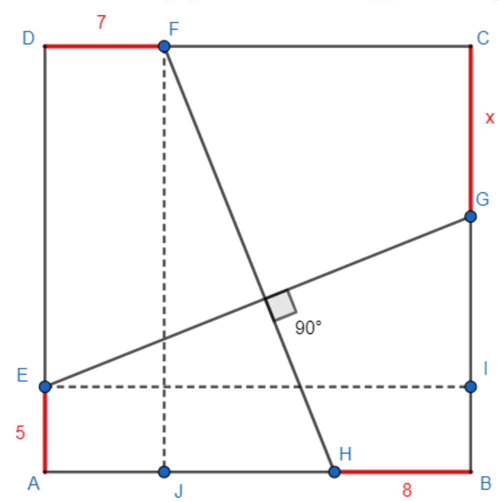
■

Problema 5 (4 puntos). *Una manzana de terreno, con esquinas $ABCD$, se divide en cuatro lotes utilizando dos segmentos de recta perpendiculares como se muestra en la siguientes figura:*

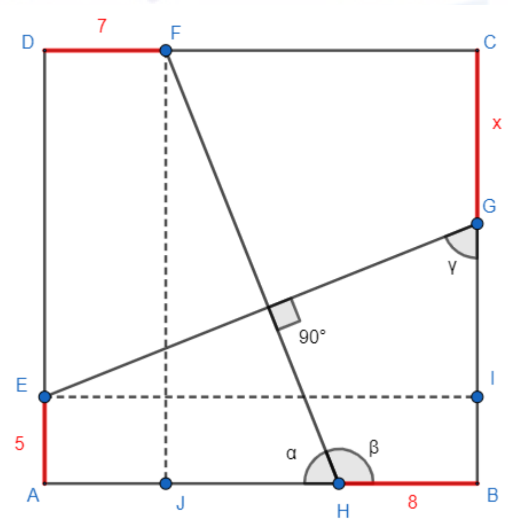


Bajo cierta escala, en la figura anterior se indican (con rojo) algunos valores de los lados de los lotes. Encuentre el valor del lado x.

Solución. Primero, la manzana, como medida de superficie, es un área correspondiente a un **cuadrado** de 100 varas. La vara es una medida española que corresponde a 0.836 metros. Ahora, nombremos los puntos de contacto de los segmentos de recta como E, F, G y H. Tracemos un segmento paralelo a CD que pase por E dentro del cuadrado. Tracemos también un segmento de recta paralelo a BC que pase por F dentro del cuadrado.



Sean $\alpha = \angle JHF$, $\beta = \angle FHB$ y $\gamma = \angle EGI$.



De la figura podemos notar que

$$\alpha + \beta = 180^\circ \qquad \text{y} \qquad \beta + \gamma + 180^\circ = 360^\circ,$$

de donde $\alpha + \beta = \beta + \gamma$. Así $\alpha = \gamma$. Por el criterio de congruencia ALA, los triángulos $\triangle EGI$ y $\triangle JFH$ son congruentes. Finalmente

$$\begin{aligned} AB &= BC \\ AJ + JH + HB &= BI + IG + GC \\ 7 + JH + 8 &= 5 + IG + x. \end{aligned}$$

Pero $JH = IG$, por tanto $x = 10$. ■

Problema 6 (5 puntos)**.** *Sean a, b, c y d números reales tales que*

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} = 1.$$

Encuentre el valor de

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c}.$$

Solución. Multiplicando por a la igualdad, tenemos

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{ab}{a+c+d} + \frac{ac}{a+b+d} + \frac{ad}{a+b+c} = a.$$

Multiplicando por b, c y d obtenemos de manera respectiva las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{ab}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{bc}{a+b+d} + \frac{bd}{a+b+c} &= b, \\ \frac{ac}{b+c+d} + \frac{bc}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{cd}{a+b+c} &= c, \\ \frac{ad}{b+c+d} + \frac{bd}{a+c+d} + \frac{cd}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c} &= d. \end{aligned}$$

Sumando las cuatro igualades anteriores, conseguimos

$$\frac{a^2}{b+c+d} + a + \frac{b^2}{a+c+d} + b + \frac{c^2}{a+b+d} + c + \frac{d^2}{a+b+c} + d = a + b + c + d.$$

Por tanto

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=0.$$

■

Problema 7 (3 puntos)**.** *Considere las sucesiones recursivas* (x_n) *y* (y_n) *definidas por* $x_1=1$, $y_1=0$,

$$x_{n+1}=\frac{5x_n-12y_n}{13} \qquad y \qquad y_{n+1}=\frac{12x_n+5y_n}{13}$$

para cada entero positivo n*. Calcule el valor de* $x_{2024}^2+y_{2024}^2$*. Justifique su respuesta.*

Primera solución. Haciendo algunos casos particulares, es fácil conjeturar que $x_n^2+y_n^2=1$ para todo n. En efecto, para los primeros términos se tiene que

- $x_1=1$, $y_1=0$; $x_1^2+y_1^2=1^2+0^2=1$
- $x_2=5/13$, $y_2=12/13$; $x_2^2+y_2^2=\frac{25+144}{169}=1$
- $x_3=119/169$, $y_3=120/169$; $x_3^2+y_3^2=\frac{14161+14400}{28561}=1$

Vamos a demostrar que $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=x_n^2+y_n^2$. En efecto, utilizando las fórmulas de la recursión, tenemos que

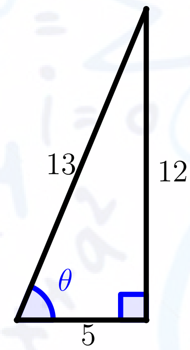
$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 &= \left(\frac{5x_n-12y_n}{13}\right)^2+\left(\frac{12x_n+5y_n}{13}\right)^2\\
&= \frac{25x_n^2-120x_ny_n+144y_n^2}{169}+\frac{144x_n^2+120x_ny_n+144y_n^2}{169}\\
&= \frac{25x_n^2-120x_ny_n+144y_n^2+144x_n^2+120x_ny_n+144y_n^2}{169}\\
&= \frac{169x_n^2+169y_n^2}{169}\\
&= x_n^2+y_n^2.
\end{aligned}$$

Luego, aplicando repetidamente esta identidad, obtenemos que

$$x_{2024}^2+y_{2024}^2=x_{2023}^2+y_{2023}^2=x_{2022}^2+y_{2022}^2=\cdots=x_2^2+y_2^2=x_1^2+y_1^2=1.$$

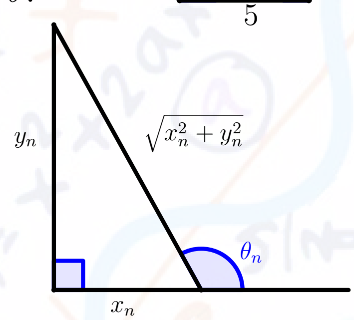
■

Segunda solución. Puesto que $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$, por el recíproco del teorema de Pitágoras existe un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13. Sea θ el ángulo formado por los lados 5 y 13. Se tiene así que $\cos\theta = 5/13$ y $\operatorname{sen}\theta = 12/13$. Luego, podemos reescribir las fórmulas de recursión como



$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \tfrac{5x_n - 12y_n}{13} = \tfrac{5}{13}x_n - \tfrac{12}{13}y_n = x_n\cos\theta - y_n \operatorname{sen}\theta, \\ y_{n+1} &= \tfrac{12x_n + 5y_n}{13} = \tfrac{12}{13}x_n + \tfrac{5}{13}y_n = x_n \operatorname{sen}\theta + y_n\cos\theta. \end{aligned}$$

Ahora, para cada entero positivo n, consideremos el triángulo rectángulo con catetos x_n y y_n, acomodado de manera que si x_n es negativo, vaya hacia la izquierda, y si y_n es negativo vaya hacia abajo. En la figura se muestra el caso $x_n < 0$ y $y_n > 0$. Por teorema de Pitágoras, su hipotenusa mide $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Sea θ_n el ángulo tal que



$$\cos\theta_n = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta_n = \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}},$$

es decir, $x_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\cos\theta_n$ y $y_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\operatorname{sen}\theta_n$. Sustituyendo en las fórmulas anteriores:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n\cos\theta - y_n\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\cos\theta_n\cos\theta - \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\operatorname{sen}\theta_n\operatorname{sen}\theta \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}[\cos\theta_n\cos\theta - \operatorname{sen}\theta_n\operatorname{sen}\theta] \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\cos(\theta_n + \theta) \\ y_{n+1} &= x_n\operatorname{sen}\theta + y_n\cos\theta = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\operatorname{sen}\theta_n\cos\theta + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\operatorname{sen}\theta_n\cos\theta \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}[\operatorname{sen}\theta_n\cos\theta + \operatorname{sen}\theta_n\cos\theta] \\ &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\operatorname{sen}(\theta_n + \theta) \end{aligned}$$

Comparando con las fórmulas

$$x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}\cos\theta_{n+1}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}\operatorname{sen}\theta_{n+1},$$

lo anterior nos dice que $\sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ y $\theta_{n+1} = \theta_n + \theta$. Así tenemos que $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ no cambia, y podemos concluir como en la primera solución que es $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = 1$ para todo n. Más aún, este cálculo nos dice que el punto (x_{n+1}, y_{n+1}) se obtiene a partir de (x_n, y_n) efectuando una rotación por un ángulo de $\theta = \cos^{-1}(5/13)$. Por ello, la distancia al origen no cambia. ■

Problema 8 (4 puntos)**.** *Considere un triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$ y sea P un punto sobre el lado BC. El punto E sobre AC y el punto F sobre AB son tales que los ángulos $\angle AEP$ y $\angle AFP$ son ambos rectos. Sean d_1 y d_2 las distancias desde P a los lados AB y AC, es decir, d_1 es la longitud de PF y d_2 es la longitud de PE. Demuestre que la suma $d_1 + d_2$ es la misma para todo punto P sobre BC.*

Solución. Llamémosle ℓ a la longitud de los lados AB y AC del triángulo isósceles ABC. Puesto que el área de un triángulo es igual a *base por altura sobre dos*, para el triángulo ABP tenemos que

$$\text{Área}(ABP) = \frac{AB \times PF}{2} = \frac{\ell \times d_1}{2}$$

De igual manera, tenemos que $\text{Área}(ACP) = \frac{\ell \times d_2}{2}$. Observando que el área de ABC es la suma de las áreas de ABP y ACP, tenemos que

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(ABP) + \text{Área}(ACP) = \frac{\ell \times d_1}{2} + \frac{\ell \times d_2}{2} = \frac{\ell \times (d_1 + d_2)}{2}.$$

De la igualdad $\text{Área}(ABC) = \frac{\ell \times (d_1 + d_2)}{2}$, tenemos que

$$d_1 + d_2 = \frac{2\text{Área}(ABC)}{\ell}.$$

Claramente, el valor de $\frac{2\text{Área}(ABC)}{\ell}$ no depende de la elección del punto P, lo cual muestra que la suma $d_1 + d_2$ es la misma para todo punto P sobre BC. ■

Problema 9 (5 puntos)**.** *En el plano cartesiano considere los puntos $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$.*

1. *Para el punto $P = (a, b)$, con $b \neq 0$, demuestre que el ángulo $\angle BPC$ cumple que*

$$\cot(\angle BPC) = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b}.$$

¿Cuáles son los puntos P tales que $\angle BPC$ es un ángulo recto?

2. *Considere un punto $A = (x, y)$ sobre la circunferencia de diámetro BC. Sean D el punto sobre BC tal que $\angle ADB = 90°$, $O = (0,0)$, M el punto medio de AD y G el punto sobre AO tal que $AG = 2GO$. Demuestre que*

$$\angle BMC + \angle BGC = 270°.$$

Primera solución. En el inciso 1, notemos que las pendientes de las rectas PB y PC son

$$m_{PB} = \frac{y_B - y_P}{x_B - y_P} = \frac{b-0}{a-(-1)} = \frac{b}{a+1}, \quad m_{PC} = \frac{y_C - y_P}{x_C - y_P} = \frac{b-0}{a-1} = \frac{b}{a-1}.$$

Luego, la tangente del ángulo entre ellas es

$$\begin{aligned}\tan \angle BPC &= \frac{m_{PC} - m_{PB}}{1 + m_{PB}m_{PC}} = \frac{\frac{b}{a-1} - \frac{b}{a+1}}{1 + \frac{b}{a+1}\frac{b}{a-1}} \\ &= \frac{\frac{b}{a-1} - \frac{b}{a+1}}{1 + \frac{b}{a+1}\frac{b}{a-1}} \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{b(a+1) - b(a-1)}{(a-1)(a+1) + b^2} = \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}.\end{aligned}$$

Entonces, si es $b \neq 0$, tenemos que

$$\cot \angle BPC = \frac{1}{\tan \angle BPC} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b}.$$

Por otro lado, el ángulo $\angle BPC$ será recto si y solo si su cotangente es cero, lo cual, por lo anterior, se tiene si y solo si $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Así, los puntos $P = (a, b)$ satisfaciendo esta ecuación son los que pertenecen a la circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio 1, es decir, la circunferencia de diámetro BC.

Para el segundo inciso, el que $A = (x, y)$ esté sobre la circunferencia de diámetro BC nos dice que es $x^2 + y^2 = 1$. Puesto que B y C están sobre el eje x, tenemos que D también lo está. Más aún, al ser $\angle ADB = 90°$ se sigue que es $D = (x, 0)$. Por tanto, el punto medio del segmento AD es $M = (x, \frac{y}{2})$. Ahora, por ser $AG = 2GO$, tenemos que OG es la tercera parte de OA. Por lo tanto, es $G = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$. Aplicando el inciso anterior a los puntos M y G, tenemos que

$$\begin{aligned} \cot\angle BMC &= \frac{x^2+(y/2)^2-1}{2(y/2)} = \frac{4x^2+y^2-4}{4y}, \\ \cot\angle BGC &= \frac{(x/3)^2+(y/3)^2-1}{2(y/3)} = \frac{x^2+y^2-9}{6y}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que es $x^2+y^2=1$, se sigue que

$$\begin{aligned} \cot\angle BMC &= \frac{4x^2+y^2-4}{4y} = \frac{4x^2+(4y^2-3y^2)-4}{4y} = \frac{-3y^2}{4y} = -\frac{3y}{4}, \\ \cot\angle BGC &= \frac{x^2+y^2-9}{6y} = \frac{-8}{6y} = -\frac{4}{3y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $\cot\angle BMC \cdot \cot\angle BGC = 1$. Así, tenemos que

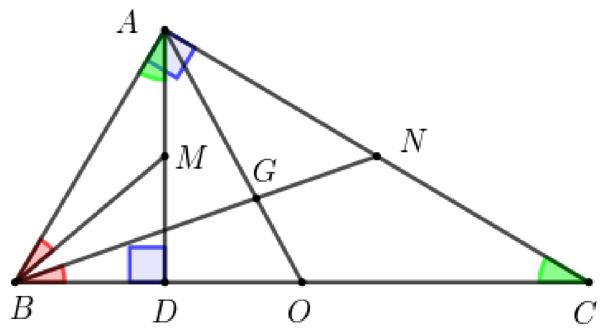
$$\cot(\angle BMC + \angle BGC) = \frac{\cot\angle BMC \cdot \cot\angle BGC - 1}{\cot\angle BMC + \cot\angle BGC} = 0.$$

Puesto que M y G están dentro de ABC y es $\angle BAC = 90^\circ$, se sigue que $\angle BMC$ y $\angle BGC$ son ambos obtusos. Luego, se sigue que $\angle BMC + \angle BGC$ está entre 180° y 360°. Finalmente, el que $\cot(\angle BMC + \angle BGC) = 0$, implica que $\angle BMC + \angle BGC = 270^\circ$, tal como queríamos probar. ■

Segunda solución. La demostración de la identidad $\cot\angle BPC = \frac{a^2+b^2-1}{2b}$ puede efectuarse como en la primera solución. Por otro lado, un resultado básico sobre círculos en geometría euclidiana[1] afirma que los puntos tales que $\angle BPC = 90^\circ$ pertenecen a la circunferencia de diámetro BC.

Para probar el segundo inciso, no utilizaremos coordenadas, sino únicamente algunas semejanzas. Primero observemos que, al estar A en la circunferencia de diámetro BC, del inciso anterior tenemos que $\angle BAC = 90^\circ$. Luego, el triángulo ABC es semejante al triángulo DBA. Esto se debe al criterio (AA), pues ambos comparten el ángulo en B y además tienen un ángulo recto. De dicha semejanza concluimos que $\angle BAD = \angle BCA$ y que $BA/AD = BC/CA$.

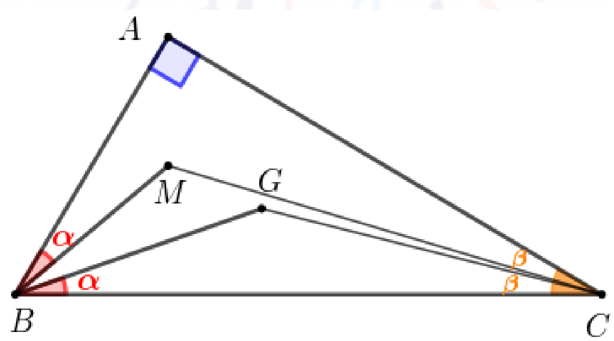
[1]Conocido como teorema de Tales, aunque no es el de las paralelas.



Puesto que AO es una mediana y $AG = 2GO$, tenemos que G es el *gravicentro* de ABC, es decir, es el punto por el cual pasan las tres medianas del triángulo. En particular, la recta BG interseca a AC en su punto medio N. Más aún, observemos que por ser M y N los respectivos puntos medios de DA y AC, tenemos que

$$\frac{BA}{AM} = 2\frac{BA}{AD} = 2\frac{BC}{CA} = \frac{BC}{CN}.$$

Esto junto con la igualdad $\angle BAM = \angle BCN$ nos dice que los triángulos BAM y BCN son semejantes por el criterio (LAL). En particular, se tiene la igualdad de ángulos $\angle ABM = \angle CBN = \angle CBG$.



En el desarrollo anterior probamos la igualdad de ángulos $\angle ABM = \angle CBG$ (α). De manera totalmente análoga se puede demostrar que $\angle ACM = \angle BCG$ (β). Ahora bien, recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es $180°$. Aplicándolo a los triángulos BGC, BMC y BAC, obtenemos que

$$\begin{aligned}
180° &= \angle BGC + \alpha + \beta, \\
180° &= \angle BMC + \angle MCB + \angle CBM, \\
180° &= 90° + (\beta + \angle MCB) + (\angle CBM + \alpha).
\end{aligned}$$

Sumando las primeras dos igualdades y restando la tercera, obtenemos que

$$\begin{aligned}180^\circ =& (\angle BGC + \alpha + \beta) + (\angle BMC + \angle MCB + \angle CBM) \\ &- (90^\circ + \beta + \angle MCB + \angle CBM + \alpha) \\ =& \angle BGC + \angle BMC - 90^\circ,\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\angle BMC + \angle BGC = 270^\circ$. ■

Problema 10 (3 puntos)**.** *Sea $p(x)$ un polinomio de grado n y de coeficientes enteros. Demuestre que para cualesquiera números enteros a y b se tiene que $p(b) - p(a)$ es múltiplo de $b - a$.*

Solución. Al ser $p(x)$ un polinomio de grado n y coeficientes enteros, se tiene que es de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son todos números enteros. Luego, notemos que $p(b) - p(a)$ puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}p(b) - p(a) &= (a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n) - (a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \cdots + a_n a^n) \\ &= a_1(b - a) + a_2(b^2 - a^2) + \cdots + a_n(b^n - a^n)\end{aligned}$$

Ahora observemos que cada uno de los términos $a_i(b^i - a^i)$ es múltiplo de $b - a$. En efecto, se puede verificar por multiplicación directa la factorización

$$b^i - a^i = (b - a)(b^{i-1} + b^{i-2}a + b^{i-3}a^2 + \cdots + b^2 a^{i-3} + b a^{i-2} + a^{i-1}).$$

Puesto que cada término del segundo paréntesis es un entero, se sigue que $b^i - a^i$ es múltiplo de $b - a$. Luego, cada término $a_i(b^i - a^i)$ es múltiplo de $b - a$, y entonces $p(b) - p(a)$ es múltiplo de $b - a$, ya que es suma de múltiplos de $b - a$. ■

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx