Competencia de Matemáticas por Equipos 2024

Nivel Medio Superior

Soluciones al Tercer Listado de Problemas

Problema 1 (4 puntos)**.** *Encontrar todos los ángulos x, entre 0 y 360°, que satisfacen*

$$81^{sen^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} = 30.$$

Muestra tu razonamiento.

Solución.

$$\begin{aligned}
81^{\text{sen}^2(x)} + 81^{\cos^2(x)} &= 30 \\
81^{\text{sen}^2(x)} + 81^{1-\sin^2(x)} &= 30 \\
81^{\text{sen}^2(x)} + \frac{81}{81^{\sin^2(x)}} &= 30 \\
\frac{81^{2\text{sen}^2(x)} + 81}{81^{\sin^2(x)}} &= 30 \\
81^{2\text{sen}^2(x)} - 30 \cdot 81^{\text{sen}^2(x)} + 81 &= 0
\end{aligned}$$

Sustituimos $y = 81^{\text{sen}^2(x)}$ y tenemos:

$$y^2 - 30y + 81 = 0.$$

Resolviendo tenemos $y = 27$ y $y = 3$, es decir, $y = 3^3$ y $y = 3$. Además, $y = 3^{4\text{sen}^2(x)}$, por lo tanto, para la primera solución:

$$\begin{aligned}
y = 3^{4\text{sen}^2(x)} &= 3^3 = 27 \\
4\text{sin}^2(x) &= 3 \\
\sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
x &= 60°, 120°,
\end{aligned}$$

para la segunda solución:

$$
\begin{aligned}
y = 3^{4\text{sen}^2(x)} &= 3^1 = 3 \\
4\text{sin}^2(x) &= 1 \\
\text{sin}(x) &= \frac{1}{2} \\
x &= 30^\circ, 150^\circ
\end{aligned}
$$

Las soluciones son entonces:

$$\{30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}.$$

■

Problema 2 (3 puntos)**.** *Sin usar calculadora, determina cuál de los siguientes números es el más grande. Explica tu razonamiento.*

$$3^{50}, \;\; 4^{40}, \;\; 5^{30}$$

Solución. Tenemos

$$
\begin{aligned}
3^{50} &= 3^{5\cdot 10} = (3^5)^{10} = 243^{10}, \\
4^{40} &= 4^{4\cdot 10} = (4^4)^{10} = 256^{10}, \\
5^{30} &= 5^{3\cdot 10} = (5^3)^{10} = 125^{10}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, 4^{40} es el mayor. ■

Problema 3 (5 puntos)**.** *Sea ABC un número primo de 3 dígitos (los dígitos son A, B y C), considera la ecuación cuadrática*

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

¿Puede tener soluciones enteras? Justifique la respuesta.

Solución. Verificaremos que no puede tener soluciones enteras, para esto supondremos que la ecuación sí tiene dos soluciones enteras y veremos que esto implicaría que el número ABC no puede ser primo.

Sea $w = ABC$ un número primo de 3 dígitos, entonces

$$A \in \{1, 2, ..., 9\},$$
$$B \in \{0, 1, ..., 9\},$$
$$C \in \{1, 3, 7, 9\}.$$

Si la ecuación tiene dos soluciones enteras, $p, q \in \mathbb{Z}$, esta se puede factorizar como

$$Ax^2 + Bx + C = A(x + p)(x + q),$$

y además,

$$A(p + q) = B$$
$$A(pq) = C.$$

Es decir, B, C son multiplos de A. Si $A \neq 1$, esto quiere decir que el número w es divisible entre A y por lo tanto, no podría ser primo. Esto implica que $A = 1$. Por lo tanto, w es el número con dígitos $1BC$, la factorización es

$$x^2 + Bx + C = (x + p)(x + q),$$

con

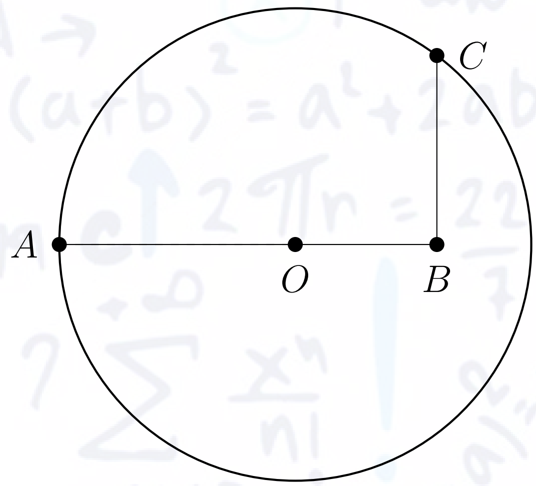
$$p + q = B$$
$$pq = C.$$

Recordemos que $C \in \{1, 3, 7, 9\}$, veamos cada posible valor de C y analicemos su implicación en las ecuaciones anteriores, recordando que p, q son enteros:

- Si $C = 1$ entonces $(p, q) = (1, 1)$, $B = 2$ y $w = 121$ el cual no es primo.
- Si $C = 3$ entonces $(p, q) = (3, 1)$ o $(p, q) = (1, 3)$; en ambos casos $B = 4$ y $w = 143$ el cual no es primo.
- Si $C = 7$ entonces $(p, q) = (7, 1)$ o $(p, q) = (1, 7)$; en ambos casos $B = 8$ y $w = 187$ el cual no es primo.
- Si $C = 9$ entonces $(p, q) = (9, 1)$, $(p, q) = (1, 9)$ o $(p, q) = (3, 3)$. En los primeros dos casos $B = 10$, el cuál no puede ser un dígito; en el tercer caso $B = 6$ y $w = 169$, el cual no es primo.

Todo esto significa que si las soluciones de la ecuación son enteras el número $w = ABC$ no puede ser primo. ■

Problema 4 (3 puntos). *Considera la circunferencia siguiente con centro en O. El segmento AB mide 10 y el segmento BC mide 5. Encuentra el radio de la circunferencia (Nota: la figura no está hecha a escala).*

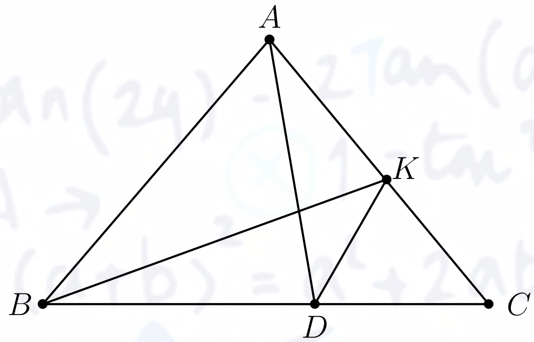


Solución. Observar que $AO = OC = r$. Como $AB = 10$ y $AB = r + OB$ entonces $OB = 10 - r$. Usando el teorema de Pitagoras en el triángulo OBC tenemos

$$
\begin{aligned}
OB^2 + BC^2 &= OC^2 \\
(10 - r)^2 + 5^2 &= r^2 \\
125 - 20r &= 0 \\
r &= \frac{125}{20} \\
r &= 6.25
\end{aligned}
$$

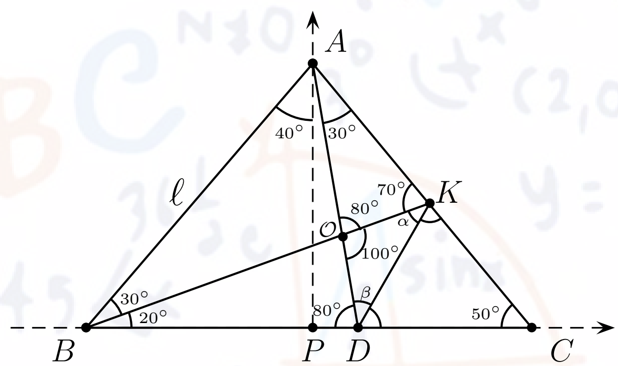
■

Problema 5 (4 puntos). *En la figura siguiente, ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ y $\angle BAC = 80°$. Los puntos D y K están sobre los lados BC y AC, respectivamente, y son tales que $\angle CAD = \angle ABK = 30°$. ¿Cuál es la medida, en grados, de $\angle BKD$? (Nota: la figura no está hecha a escala).*



Solución. Sea $\mathcal{O}$ el punto de intersección de los segmentos BK y AD. Introducimos coordenadas cartesianas, con el eje x a lo largo de BC, con origen P en el punto medio de BC. Sea ℓ la longitud de AB (y de AC). α y β son los ángulos agudos del $\Delta\mathcal{O}KD$. Debemos encontrar la medida de α.

Todas las medidas que se muestran a continuación se deducen directamente de la información dada.



$$\Delta BDA \sim \Delta ABC \quad \Rightarrow \quad \frac{BD}{\ell} = \frac{AD}{\ell} = \frac{\ell}{BC}$$

$$\Delta AOK \sim \Delta BAK \quad \Rightarrow \quad \frac{AO}{AK} = \frac{AK}{BK} = \frac{AO}{\ell}$$

$$\Delta ADC \sim \Delta BOA \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{\ell} = \frac{AD}{OB} = \frac{DC}{OA}$$

Del ΔABP :

$$\operatorname{sen} 40^\circ = \frac{BP}{\ell}, \qquad BP = \ell \operatorname{sen} 40^\circ, \qquad BC = 2 \times BP = 2\ell \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$\frac{BD}{\ell} = \frac{AD}{\ell} = \frac{\ell}{BC} = \frac{\ell}{2\ell \operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 40^\circ} \Rightarrow BD = AD = \frac{\ell}{2 \operatorname{sen} 40^\circ}$$

ΔBOD es isósceles:

$$BO = BD = \frac{\ell}{2\operatorname{sen}40^\circ}$$

Ley de los senos en ΔABK :

$$\frac{BK}{\operatorname{sen}80^\circ} = \frac{\ell}{\operatorname{sen}70^\circ} \Rightarrow BK = \ell\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\operatorname{sen}70^\circ}$$

Ley de los senos en el ΔBDK :

$$\frac{BK}{\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)} = \frac{BD}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$BK\operatorname{sen}\alpha = BD\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)$$

$$\ell\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\operatorname{sen}70^\circ}\operatorname{sen}\alpha = \frac{\ell}{2\operatorname{sen}40^\circ}\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)$$

Tomando en cuenta que $\alpha+\beta = 80^\circ$:

$$\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\operatorname{sen}70^\circ}\operatorname{sen}(80^\circ-\beta) = \frac{1}{2\operatorname{sen}40^\circ}\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)$$

$$\underbrace{2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}80^\circ}_{=c_1}\operatorname{sen}(80^\circ-\beta) = \underbrace{\operatorname{sen}70^\circ}_{=c_2}\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)$$

$$c_1\operatorname{sen}(80^\circ-\beta) = c_2\operatorname{sen}(80^\circ+\beta)$$

$$c_1[\operatorname{sen}80^\circ\cos\beta - \cos80^\circ\operatorname{sen}\beta] = c_2[\operatorname{sen}80^\circ\cos\beta + \cos80^\circ\operatorname{sen}\beta]$$

$$\underbrace{c_1\operatorname{sen}80^\circ}_{=c_3}\cos\beta - \underbrace{c_1\cos80^\circ}_{=c_4}\operatorname{sen}\beta = \underbrace{c_2\operatorname{sen}80^\circ}_{c_5}\cos\beta + \underbrace{c_2\cos80^\circ}_{c_6}\operatorname{sen}\beta$$

$$c_3\cos\beta - c_4\operatorname{sen}\beta = c_5\cos\beta + c_6\operatorname{sen}\beta$$

$$(c_3-c_5)\cos\beta = (c_4+c_6)\operatorname{sen}\beta$$

$$\tan\beta = \frac{c_3-c_5}{c_4+c_6}$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= c_1 \operatorname{sen} 80^\circ = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \operatorname{sen} 80^\circ = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen}^2 80^\circ \\
c_4 &= c_1 \cos 80^\circ = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ \\
c_5 &= c_2 \operatorname{sen} 80^\circ = \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 80^\circ = 2 \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ \\
c_6 &= c_2 \cos 80^\circ = \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\beta = \frac{c_3 - c_5}{c_4 + c_6} &= \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen}^2 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 80^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 80^\circ \left[2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ\right]}{\cos 80^\circ \left[2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ\right]} \\
&= \tan 80^\circ \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ}
\end{aligned}
$$

Identidad: $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 2\tan\theta \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = 2\tan\theta \dfrac{\cos^2\theta}{\cos 2\theta}$

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \tan 80^\circ \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ} \\
&= 2\tan 40^\circ \frac{\cos^2 40^\circ}{\cos 80^\circ} \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ}
\end{aligned}
$$

Identidad: $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \tan 40^\circ \frac{1+\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ} \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ} \\
&= k \tan 40^\circ
\end{aligned}
$$

con

$$
k = \frac{1+\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ} \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ}.
$$

Probaremos que $k = 1$.

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1+\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ}\frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ}{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ}\\
&= \frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + 2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}\\
&= \frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 160\circ - \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 160\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}\\
&= \frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \cos 80^\circ}\\
&= \frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen}(20) - \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}
\end{aligned}
$$

Identidad:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right]$$

$$\operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos(-40^\circ) - \cos 120^\circ\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 40^\circ - (-\frac{1}{2})\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\right]$$

$$\operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 10^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos 60^\circ - \cos 80^\circ\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \operatorname{sen} 10^\circ\right]$$

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{2\ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 20^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 10^\circ}\\
&= \frac{\cos 40^\circ + \tfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 70^\circ + \tfrac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \tfrac{1}{2}\right] - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 10^\circ\right]}{\tfrac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \tfrac{1}{2}\right] + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 10^\circ\right]}\\
&= \frac{\cos 40^\circ + \tfrac{1}{2} - \operatorname{sen} 70^\circ + \tfrac{1}{2}\cos 20^\circ - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}{\tfrac{1}{2}\cos 20^\circ - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}\\
&= \frac{\cos 40^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ + \tfrac{1}{2}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}{\tfrac{1}{2}\cos 20^\circ - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}\\
&= \frac{2[\cos 40^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ] + \cos 20^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 20^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ}\\
&= \frac{2[\operatorname{sen} 50^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ] + \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ}
\end{aligned}
$$

Identidades:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ = 2\operatorname{sen} 40^\circ \cos(30) = \sqrt{3}\operatorname{sen} 40^\circ$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2[\operatorname{sen} 50^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ] = 4\cos 60^\circ \operatorname{sen}(-10^\circ) = -2\operatorname{sen} 10^\circ$$

$$\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ = 2\cos 40^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = \cos 40^\circ$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{2[\operatorname{sen} 50^\circ - \operatorname{sen} 70^\circ] + \operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen} 10^\circ + \sqrt{3}\operatorname{sen} 40^\circ}{\cos 40^\circ} \end{aligned}$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} \cos 40^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 10^\circ) &= \operatorname{sen} 60^\circ \cos 10^\circ - \operatorname{sen} 10^\circ \cos 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 40^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 10^\circ) &= \operatorname{sen} 30^\circ \cos 10^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 10^\circ \end{aligned}$$

encontramos que

$$\begin{aligned} k &= \frac{-2\operatorname{sen} 10^\circ + \sqrt{3}\operatorname{sen} 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen} 10^\circ + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 10^\circ\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen} 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10^\circ} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Problema 6 (5 puntos)**.** *Si $f(x) = 2x^2 + 28x + 91$ y a y b son las dos soluciones reales de la ecuación $f(f(f(x))) = 1$, ¿cuál es el valor de $|a - b|$?*

Solución. Si $g(x) = f(f(x))$, entonces la ecuacion $f(f(f(x))) = 1$ es $f(g(x)) = 1$, o

$$2[g(x)]^2 + 28[g(x)] + 90 = 0,$$

o

$$[g(x)]^2 + 14[g(x)] + 45 = 0$$

o

$$(g(x) + 5)(g(x) + 9) = 0,$$

de donde

$$g(x) = -5 \qquad \text{ó} \qquad g(x) = -9.$$

La ecuación $g(x) = -9$ es $f(f(x)) = -9$, ó

$$2[f(x)]^2 + 28[f(x)] + 100 = 0,$$

o

$$[f(x)]^2 + 14[f(x)] + 50 = 0,$$

que no tiene soluciones reales (discriminante$= 14^2 - 200 = -4$)

La ecuación $g(x) = -5$ es $f(f(x)) = -5$, ó

$$2[f(x)]^2 + 28[f(x)] + 96 = 0,$$

ó

$$[f(x)]^2 + 14[f(x)] + 48 = 0,$$

de donde se obtiene $f(x) = -6$ o $f(x) = -8$.

La ecuación $f(x) = -8$ es $2x^2 + 28x + 99 = 0$ no tiene soluciones reales (discriminante $= 28^2 - (4)(2)(99) = -8$).

De la ecuación $f(x) = -6$ es $2x^2 + 28x + 97 = 0$, cuyo discriminante es $(28)^2 - 4(2)(97) = 8$, se tienen dos soluciones reales:

$$a, b = \frac{-28 \pm \sqrt{8}}{4} = -7 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces $|a - b| = \sqrt{2}$. ■

Problema 7 (4 puntos)**.** *¿Cuántos enteros n satisfacen la desigualdad $n^4 + 5n < 5n^3 + n^2$?*

Solución.

$$n^4 + 5n < 5n^3 + n^2$$
$$n^4 - n^2 < 5n^3 - 5n$$
$$n^2(n^2 - 1) < 5n(n^2 - 1)$$

n no puede ser 1. Para todo entero n la última desigualdad se simplifica a

$$n^2 < 5n$$

ó

$$n(5 - n) > 0.$$

Los 3 enteros que satisfacen esta desigualdad son $2, 3$ y 4. ■

Problema 8 (4 puntos)**.** *Si a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, ¿cuál es el valor de $a^9 + 13a^8b^9 + b^8$?*

Solución. Como $x^2 - x - 1 = (x - a)(x - b)$, a y b satisfacen $ab = -1$ y $a + b = 1$. Además, de $a^2 = a + 1$ y $b^2 = b + 1$ se obtiene que $a^8 = 21a + 13$, $a^9 = 34a + 21$ y $b^8 = 21b + 13$.

Entonces,

$$\begin{aligned} a^9 + 13a^8b^9 + b^8 &= 34a + 21 + 13(ab)^8b + 21b + 13 \\ &= 34a + 21 + 13b + 21b + 13 \\ &= 34(a + b) + 34 \\ &= 68 \end{aligned}$$

■

Problema 9 (5 puntos)**.** *Encuentre la suma de los primeros 2024 términos de la sucesión*

$$\frac{\pi}{4}, \quad \arctan\left(\frac{1}{3}\right), \quad \arctan\left(\frac{1}{7}\right), \quad \ldots, \quad \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right), \quad \ldots$$

Solución. La suma es $\arctan(2024)$.

En la identidad

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),$$

tomando $x = n+1$ y $y = n$ obtenemos

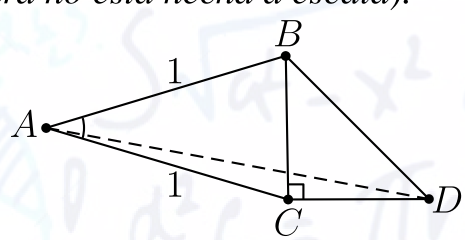
$$\arctan(n+1) - \arctan n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Entonces, la suma que se pide es *telescópica*:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \ldots + \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)\Big|_{n=2023} \\
&= \arctan(1) - \arctan(0) \\
&+ \arctan(2) - \arctan(1) \\
&+ \arctan(3) - \arctan(2) + \ldots \\
&+ \arctan(2024) - \arctan(2023) = \arctan(2024)
\end{aligned}$$

■

Problema 10 (3 puntos)**.** *El triánulo ABC es isósceles, con $AB = AC = 1$ y $\angle A = 30°$. El triángulo rectángulo BCD es isósceles, con $\angle C = 90°$ y no se traslapa con el triángulo ABC. Demuestre que la longitud del segmento AD es $\sqrt{4-\sqrt{3}}$. (Nota: la figura no está hecha a escala).*



Solución.

$$\angle B = 75° + 45° = 120°$$

Ley de los cosenos en el triángulo ABC:

$$(BC)^2 = 2 - 2\cos(30°) = 2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Pitágoras en el triángulo BCD :

$$CD = BC \Longrightarrow (BD)^2 = 2(BC)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

Ley de los cosenos en el triángulo ABD:

$$\begin{aligned}
(AD)^2 &= 1 + (DB)^2 - 2(DB)\cos(120^\circ) \\
&= 5 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 5 - 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\
&= 4 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Entonces

$$AD = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$$

■

Consultas y/o dudas sobre la competencia: competencia.mat@unison.mx